Exercice à travailler n°12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mai 2020

Un calcul de déterminant exploitant une récurrence.

1. On commence gentiment : $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$. Pour le déterminant suivant, on peut par exemple commencer par effectuer un développement par rapport à la première ligne : $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Pour le troisième déterminant on peut aussi développer par rapport à la première ligne : $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Le premier déterminant obtenu n'est autre que D_3, on sait qu'il est égal à 4. Quant au deuxième, il suffit de redévelopper par rapport à la première ligne pour obtenir D_2, qui vaut 3. Finalement, $D_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$. Bien entendu, $D_1 = 2$ (il n'y qu'un seul coefficient dans la matrice égal à 2). On se doute bien à partir des valeurs calculées qu'on devrait poser logiquement $D_0 = 1$. En effet, le déterminant de la matrice vide vaut bel et bien 1, car par convention un produit vide vaut 1. Bon, admettons que c'est un peu bizarre, on n'aura de toute façon pas besoin de cette valeur pour la suite.
2. On fait en fait le même calcul que ci-dessus : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. En redéveloppant le deuxième déterminant par rapport à sa première ligne, on retrouve exactement D_{n-2}, donc $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$.
3. Deux possibilités pour terminer l'exercice :
   - on devine que $D_n = n + 1$ et on le prouve par récurrence double à l'aide de la relation précédente (c'est facile).
   - on se rend compte que (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$, donc $(x-1)^2 = 0$. On en déduit que $D_n = (an+b) \times 1^n = an + b$. Les valeurs initiales donnent alors $a + b = 2$ (pour $n = 1$) et $2a + b = 3$ (pour $n = 2$), dont on déduit très facilement que $a = b = 1$, ce qui confirme que $D_n = n + 1$.