# Exercice à travailler n°11 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 mai 2020

## Des calculs de puissances en exploitant une diagonalisation.

1. La matrice dans la base canonique donne directement $f(x, y, z) = (2x+y+z, 3y+z, y+3z)$.
2. La famille étant constituée de trois vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre (on peut bien sûr aussi utiliser un calcul de déterminant qui serait ici très rapide). Supposons donc que $a(1, 1, 1)+b(1, -1, 1)+c(3, 1, -1) = 0$, cette égalité est équivalente au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & 3c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux dernières équations donne immédiatement $a = 0$, et restent alors les conditions $b + 3c = b - c = c - b = 0$ qui impliquent facilement $b = c = 0$. La famille est bien lire, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage demandée est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Calculons donc les images des trois vecteurs formant la base $\mathcal{B}$ : $f(1, 1, 1) = (4, 4, 4) = 4 \times (1, 1, 1)$. Puis $f(1, -1, 1) = (2, -2, 2) = 2 \times (1, -1, 1)$. Et enfin $f(3, 1, -1) = (6, 2, -2) = 2 \times (3, 1, -1)$. Chacun de ces vecteurs ayant une image proportionnelle à lui-même (ce sont donc des vecteurs propres de l'application $f$), pas besoin d'utiliser la formule de changement de base pour en déduire que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Faisons quand même la vérification en calculant $P^{-1}$, qui nous sera de toute façon indispensable ensuite. Pour cela on peut par exemple résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = & a \\ x & - & y & + & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. On commence comme tout à l'heure par additionner les deux dernières équations : $2x = b + c$ donc $x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Ensuite, en additionnant les deux premières équations, on trouve $2x + 4z = a + b$, donc $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c$. Enfin, $y = x + z - b = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c$. La matrice $P$ est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On calcule alors $MP = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on retrouve bien sûr la même matrice que ci-dessus.
4. On ca effectuer une démonstration par récurrence, en exploitant le fait que $D = P^{-1}MP$, donc $M = PDP^{-1}$ (ce qui prouve en passant la formule pour $n = 1$). En fait on peut initialiser la récurrence à $n = 0$ puisque $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = M^0$. Ensuite, l'hérédité se prouve en calculant $M^{n+1} = M^n \times M = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$.

5. On sait que $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, donc $PD^n = \begin{pmatrix} 4^n & 2^n & 3 \times 2^n \\ 4^n & -2^n & 2^n \\ 4^n & 2^n & -2^n \end{pmatrix}$, et enfin $M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Bien entendu, on en déduit immédiatement que $f^n(x, y, z) = (2^n x + (2^{2n-1} - 2^{n-1})y + (2^{2n-1} - 2^{n-1})z, (2^{2n-1} + 2^{n-1})y + (2^{2n-1} - 2^{n-1})z, (2^{2n-1} - 2^{n-1})y + (2^{2n-1} + 2^{n-1})z)$. On pouvait en fait trouver ces expressions par des méthodes beaucoup plus simples que celle utilisée dans cet exercice.
6. Essayons pour voir : si on remplace $n$ par $-1$ dans les formules précédentes on trouve comme matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Eh bien, c'est effectivement l'inverse de la matrice $M$ (on le vérifie en la multipliant simplement par $M$).