

## Exercice à travailler n°11

PTSI B Lycée Eiffel

25 mai 2020

### Des calculs de puissances en exploitant une diagonalisation.

On note dans cet exercice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $M$ . On notera par ailleurs  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, -1, 1), (3, 1, -1))$ .

1. Donner l'expression explicite de  $f(x, y, z)$ .
2. Vérifier que la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$ .
3. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$ , où  $D$  est la matrice obtenue à la question précédente.
5. En déduire l'expression explicite de  $M^n$ , et celle de  $f^n$ .
6. La même méthode permet-elle d'obtenir l'inverse  $M^{-1}$  de la matrice  $M$ ?