# Exercice à travailler n°22 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 juin 2020

## Rotations du cube.

1. Chacune des isométries est entièrement définie par l'image des huit sommets du cube (si on sait où est envoyé chaque sommet, on sait où va être envoyé chaque point du cube). I y a donc au maximum autant d'isométries possibles que de permutations des huit sommets (chaque sommet devant évidemment être envoyé sur un sommet), ce qui laisse quand même 8! possibilités. En fait il y en a nettement moins que ça : on a 8 possibilités d'image pour le premier sommet $A$. Imaginons qu'on ait fixé l'image de $A$ (par exemple il ne bouge pas), il ne restera alors que 3 images possibles pour le sommet $B$ car il doit être envoyé sur un sommet qui est à distance 1 de l'image de $A$ (sinon l'application n'est pas une isométrie !), et chaque sommet du cube n'a que trois sommets qui sont à distance 1 de lui (pour $A$ par exemple, il s'agit de $B$, $D$ et $E$). Une fois fixées les images de $A$ et de $B$, on n'a plus que deux possibilités pour l'image de $D$ (on a déjà utilisé un sommet à distance 1 de l'image de $A$ pour y placer l'image de $B$, il faut mettre $D$ à un autre endroit). Et on n'a plus qu'une seule possibilité pour l'image de $E$. Une fois fixés ces quatre points, on n'a plus le choix pour les quatre restants (l'image de $G$ doit être située à l'opposée de celle de $A$, celle de $H$ à l'opposé de celle de $B$ etc). Ce qui nous laisse en fait $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries possibles.

   Or, si on compose chacune des 48 isométries de la liste par une isométrie indirecte donnée (par exemple $-id$, qui est une isométrie indirecte faisant partie de la liste), toute isométrie directe va devenir indirecte, et vice-versa. Or, la composition par $-id$ est une bijection de notre ensemble de 48 isométries vers lui-même (c'est un résultat classique très facile à démontrer puisque la bijection réciproque est la même, si on compose deux fois de suite par $-id$ on reviendra à notre point de départ). Il y a donc autant d'isométries indirectes que directes, soit 24 dans chaque catégorie. Sinon, on peut aussi constater que, lors du raisonnement fait dans la première partie de la question, les deux chois possibles pour l'image du point $D$ donnent toujours lieu à une isométrie directe et à une isométrie indirecte.

2. Il n'y a que 23 rotation car la dernière isométrie directe n'est autre que l'identité. Les voici :
   - les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi$ et $\dfrac{3\pi}{2}$ autour de chaque axe passant par les centres de deux faces opposées (par exemple la droite $(PQ)$, où $P$ est le centre de $(ABCD)$ et $Q$ le centre de $(EFGH)$). Comme il existe trois paires de faces opposées, cela fait $3 \times 3 = 9$ rotations distinctes.
   - les rotations d'angle $\pi$ autour de chaque axe passant par les milieux de deux arêtes parallèles opposées (par exemple la droite $(IJ)$, où $I$ est le milieu de $[AE]$ et $J$ celui de $[CG]$). Comme il y a six paires d'arêtes opposées, cela fait six rotations supplémentaires.
   - les rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ (ce sont les plus dures à visualiser) autour des grandes diagonales du cube. Par exemple, en prenant la diagonale $(AG)$, les points $B$, $D$ et $E$ sont tous trois situés à la même distance de la diagonale, et dans un même plan orthogonal à cette diagonale (ils forment un triangle équilatéral dans ce plan), on peut les permuter circulairement par les deux rotations indiquées. Idem pour les sommets $C$, $F$ et $H$. Puisqu'il y a quatre grandes diagonales, nous tenons les $2 \times 4 = 8$ rotations qui nous manquaient.

Ci-dessous, une tentative d'illustration où on a représenté une rotation de chaque type. Si vous ne voyez toujours rien, vous pouvez faire l'expérience beaucoup plus concrète suivante : prenez le premier cube qui vous tombe sous la main, par exemple un dé à six faces, et tenez-le en face de vous entre deux doigts disposés sur deux sommets opposés du cube (un doigt sur B et un doigt sur H par exemple). Imaginons que la face du cubé qui soit en face de vous soit le 1 de votre dé. Maintenant, en laissant fixe la main qui tient le cube, faites tourner le cube avec votre autre main, de façon à ce que la face 1 qui vous faisait face se retrouve désormais à droite du cube. Vous avez bien fait un tiers de tour. Si vous continuez, à deux tiers de tour, la face initialement en face de vous sera la face du dessous de votre cube, puis elle reprendra sa position initiale. Sur les figures, il y a des flèches assez peu visibles au bout des pointillés marron pour indiquer le sens de rotation.