# Exercice à travailler n°21 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 juin 2020

## Des calculs classiques dans l'espace.

1. En utilisant la méthode classique « en deux temps », on commence par calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2,-8,-2) \wedge (3,0,3) = (-24,-12,24)$. Bien sur, on peut tout diviser par $-12$ pour obtenir comme vecteur normal au plan $(ABC)$ le vecteur $\vec{n} = (2,1,-2)$. Le plan $(ABC)$ a donc une équation de la forme $2x+y-2z+d=0$, et l'appartenance du point $A$ au plan assure que $-2+2-2+d=0$, donc $d=2$ et une équation du plan est donnée par $2x+y-2z+2=0$.
   Autre méthode possible, on dit directement que $M(x,y,z)$ appartient au plan $(ABC)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, donc si $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ y-2 & -8 & 0 \\ z-1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. On peut diviser la deuxième ligne par 2 et la troisième par 3 sans que ça ne change quoi que ce soit : $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-2 & -4 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne pour trouver l'équation $\begin{vmatrix} y-2 & -4 \\ z-1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, donc $-(y-2)+4(z-1)-4(x+1)-(y-2)=0$, ou encore $-4x-2y+4z-4=0$. À un facteur près, on retombe bien sûr sur la même équation que ci-dessus.
2. Plusieurs méthodes possibles, mais pour une fois passer par le calcul des (carrés des) distances est assez rapide (ça évite surtout de devoir faire trois calculs de produit scalaire si on ne tombe pas tout de suite sur l'angle droit). On calcule donc $AB^2 = 2^2+8^2+2^2 = 72$ ; $AC^2 = 3^2+3^2 = 18$ et $BC^2 = 1^2+8^2+5^2 = 90$. On constate que $BC^2 = AB^2+AC^2$, ce qui prouve que le triangle est rectangle en $A$ (réciproque du théorème de Pythagore). Le vecteur $(DA)$ a pour coordonnées $(-2,-1,2)$, il est donc colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ calculé plus haut, et orthogonal au plan $(ABC)$. Le tétraèdre $ABCD$ est donc « doublement rectangle » en $A$ (les trois arêtes du tétraèdre qui se coupent en $A$ sont deux à deux perpendiculaires). Le volume du tétraèdre vaut donc $\frac{1}{6} \times AB \times AC \times AD$. Calculons $AD = \sqrt{4+1+4} = 3$, et concluons : le volume est égal à $\frac{\sqrt{72} \times \sqrt{18} \times 3}{6} = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 18$ unités de volume.
3. (a) Le vecteur $\vec{j}$ est normal au plan $Q'$, alors que le vecteur $(1,1,-3)$ est normal à $Q$. Ces deux vecteurs normaux n'étant clairement pas colinéaires, les deux plans ne sont pas parallèles, et donc nécessairement sécants.
   (b) C'est complètement trivial : $y=0$ (c'est ce qu'on appelle un **plan de coordonnées** du repère.
   (c) En imposant la condition $y=0$ dans l'équation du plan $Q$, on obtient $x-3z+2=0$, donc $x=3z-2$. On peut donc représenter la droite d'intersection par le paramétrage très simple suivant, en prenant $z$ comme paramètre : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t-2 \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{array}\right.$. En particulier, le

point de coordonnées $(-2, 0, 0)$ appartient à la droite, et le vecteur de coordonnées $(3, 0, 1)$ en est un vecteur directeur.

4. Il suffit de l'écrire : $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$, donc $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$.

5. Le vecteur $\overrightarrow{JK}(3, 0, 1)$ est un vecteur directeur de la droite (il s'agit tout bêtement de la droite obtenue à la question $c$), dont on déduit le même paramétrage que deux question plus haut. Pour obtenir les points d'intersection, on remplace tout simplement les trois coordonnées par leur expression paramétrique dans l'équation de la sphère : $(3t-2)^2 + t^2 + 2t - 2 = 0$, soit $10t^2 - 10t + 2 = 0$. On peut diviser tout par 2 puis calculer le discriminant $\Delta = 25 - 20 = 5$, et obtenir les deux racines $t_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ et $t_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$. Il reste quand même à calculer les abscisses correspondantes : $x_1 = 3t_1 - 2 = \dfrac{-3\sqrt{5}-5}{10}$ et $x_2 = 3t_2 - 2 = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}$. On conclut ce palpitant exercice en donnant les coordonnées complètes des deux points : $\left(\dfrac{-3\sqrt{5}-5}{10}, 0, \dfrac{-\sqrt{5}-5}{10}\right)$ et $\left(\dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, \dfrac{\sqrt{5}+5}{10}\right)$.