Exercice à travailler n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 mai 2020

Encore des histoires de projection.

1. Il suffit de « résoudre » l'équation définissant le plan, par exemple en écrivant que $y = -x - 2z$, et donc que $\mathcal{P} = \{(x, -x - 2z, z) \mid (x, z,) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, -2, 1))$. La famille $((1, -1, 0), (0, -2, 1))$ étant libre (ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels), elle forme une base de $\mathcal{P}$. On notera pour la suite $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, -2, 1)$.
2. Le vecteur $(1, 2, 1)$ n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$ puisque ses coordonnées ne satisfont pas l'équation $x + y + 2z = 0$, donc, en notant $F = \text{Vect}((1, 2, 1))$ notre droite, $F \cap \mathcal{P} = \{0\}$. Comme on a par ailleurs $\dim(\mathcal{P}) + \dim(F) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, les sous-espaces vectoriels F et $\mathcal{P}$ sont supplémentaires, et la famille $\mathcal{B}$ obtenue en regroupant leurs bases est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Par définition de la projection, les vecteurs v_1 et v_2 sont invariants par p, donc $p(v_1) = v_1$ et $p(v_2) = v_2$. De même, $p(u) = 0$ puisque ce vecteur appartient à la droite parallèlement à laquelle on projette. La matrice M est donc diagonale : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Il suffit d'écrire les coordonnées de nos vecteurs en colonnes pour obtenir la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer son inverse, on peut par exemple résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & a \\ -x & - & 2y & + & 2z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{array} \right.$. Les deux équations extrêmes donnent immédiatement $x = a - z$ et $y = c - z$. On remplace dans la deuxième équation : $-a + z - 2c + 2z + 2z = b$, donc $z = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{2}{5}c$, puis $x = \frac{4}{5}a - \frac{1}{5}b - \frac{2}{5}c$ et $y = -\frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b + \frac{3}{5}c$. La matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. La formule de changement de base nous assure que $M = P^{-1}MP$, donc $N = PMP^{-1}$.
6. On calcule donc $PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N = PMP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Puisque cette matrice est celle de l'application p dans la base canonique, on peut calculer les coordonnées de $p(x, y, z)$ en multipliant la matrice N par le vecteur-colonne contenant les coordonnées (x, y, z), ce qui donne $p(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z, -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z, -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{3}{5}z\right)$.
7. Cherchons donc les coefficients a, b et c, ce qui revient à résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & & & + & c & = & x \\ -a & - & 2b & + & 2c & = & y \\ & & b & + & c & = & z \end{array} \right.$. Il s'agit exactement du système résolu à la question 4, on

ne va donc pas recommencer, on sait que $a = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z$ et $b = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{3}{5}z$ (la valeur de c n'a aucune importance). On en déduit que $p(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(0,-2,1) = (a, -a-2b, b) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z, -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z, -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{3}{5}z\right)$. On retrouve bien sûr la même expression que tout à l'heure.