Exercice à travailler n°19 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 juin 2020

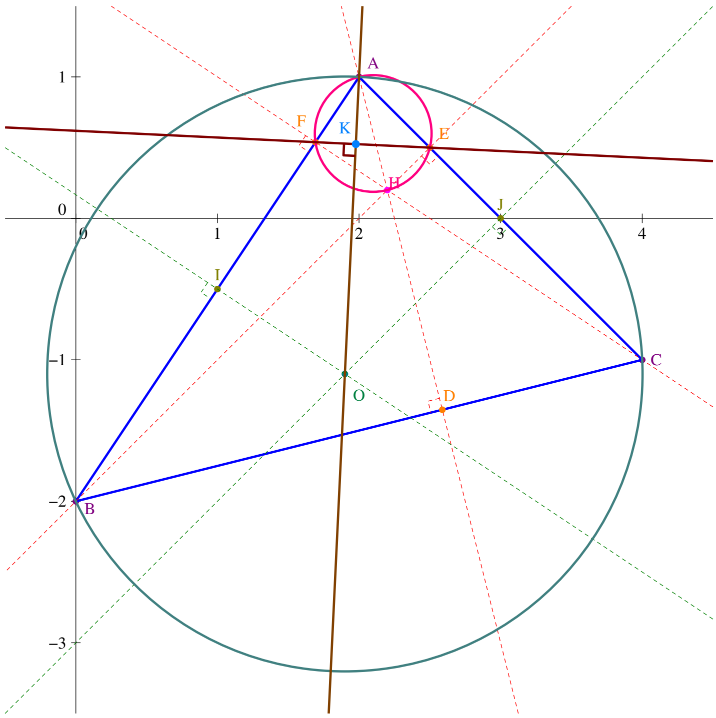
Encore des calculs de coordonnées à partir d'un triangle.

Comme l'auront certainement constaté les élèves qui auront essayé de faire cet exercice (et qui doivent être fort rares dans la mesure où je n'ai reçu aucune protestation le concernant, un léger problème se pose du fait que le triangle proposé était rectangle en A, ce qui rendait la suite de l'exercice complètement grotesque (les points A, E, F et H sont confondus, O est le milieu de $[BC]$, le cercle de diamètre $[AH]$ est réduit à un point et surtout la droite (EF) n'a plus aucun sens puisque les deux points sont au même endroit). Pour éviter que cette correction ne le soit aussi (grotesque), nous nous permettrons donc de déplacer subrepticement le point B pour le mettre aux coordonnées $(0, -2)$ (on gardera par contre $A(2, 1)$ et $C(4, -1)$), histoire d'avoir des calculs plus raisonnables.

1. Le plus simple est de calculer les équations de deux médiatrices. Prenons par exemple celle de $[AB]$: le milieu I du segment a pour coordonnées $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$, un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice si $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$, donc si $-2(x-1) - 3\left(y + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. Quitte à changer les signes, on trouve comme première équation $2x + 3y - \dfrac{1}{2} = 0$, ou encore $4x + 6y - 1 = 0$. Cherchons maintenant une équation de la médiatrice du segment $[AC]$. Le milieu J du segment a pour coordonnées $(3, 0)$, et la condition $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC} = 0$ se traduit donc par $2(x-3) - 2y = 0$, donc $x - y = 3$. Le centre du cercle circonscrit a donc des coordonnées qui vérifient $4x + 6y - 1 = x - y - 3 = 0$. L'opération $L_1 - 4L_2$ donne $10y + 11 = 0$, donc $y = -\dfrac{11}{10}$ puis $x = \dfrac{19}{10}$. On en déduit que $O\left(\dfrac{19}{10}, -\dfrac{11}{10}\right)$. Le rayon du cercle est égal à l'une des distances du centre 0 à l'un des sommets du triangle, donc par exemple $OA = \sqrt{\left(\dfrac{19}{10} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{11}{10} - 1\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{100} + \dfrac{441}{100}} = \dfrac{\sqrt{442}}{10}$ (non, ça ne se simplifie pas vraiment). Une équation du cercle est donc $\left(x - \dfrac{19}{10}\right)^2 + \left(y + \dfrac{11}{10}\right)^2 = \dfrac{221}{50}$, soit $x^2 - \dfrac{19}{5}x + \dfrac{361}{100} + y^2 + \dfrac{11}{5}y + \dfrac{121}{100} = \dfrac{221}{50}$, ou encore $x^2 + y^2 - 3,8x + 2,2y + 0,4 = 0$. Si on aime pas les nombres décimaux, on multiplie tout par 5 : $5x^2 + 5y^2 - 19x + 11y + 2 = 0$. Superbe, non ? On a vraiment bien fait de déplacer le point B.
2. La hauteur issue de A est définie par la condition $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$, donc $4(x-2) + (y-1) = 0$, ou encore $4x + y - 9 = 0$. La hauteur issue de B a pour équation $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$, donc $2x - 2(y+2) = 0$, ou encore $x - y - 2 = 0$. Enfin, la hauteur issue de C a pour équation $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$, donc $-2(x-4) - 3(y+1) = 0$, ou encore (en changeant les signes) $2x + 3y - 5 = 0$. Le point F doit appartenir à la droite (AB), donc vérifier $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $-3(x-2) + 2(y-1) = 0$, ou encore $2y - 3x + 4 = 0$. En combinant cette équation avec la condition $2x + 3y - 5 = 0$, on obtient $F\left(\dfrac{22}{13}, \dfrac{7}{13}\right)$. De même, le point E doit appartenir à (AC), donc vérifier $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0$,

soit $2(x-2)+2(y-1)=0$ ou encore $x+y-3=0$. En combinant cette condition à l'équation $x-y-2=0$, on trouve facilement $E\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Enfin, le point D vérifie $\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})=0$, donc $x-4(y+2)=0$, ou encore $x-4y-8=0$. En combinant avec l'équation $4x+y-9=0$, on obtient cette fois $D\left(\frac{44}{17}, -\frac{23}{17}\right)$.

3. L'orthocentre $H(x,y)$ vérifie les trois équations de la question précédente, donc en particulier $4x+y=9$ et $x-y=2$. En additionnant les deux équations on trouve $x=\frac{11}{5}$, puis $y=\frac{1}{5}$ ce qui donne $H\left(\frac{11}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Tant qu'on y est, et même si l'énoncé ne le demandait pas explicitement, faisons donc une belle figure (sur laquelle on place également les éléments utilisés dans les questions suivantes) :



4. Deux possibilités pour l'équation du cercle demandé :
   - On calcule les coordonnées de son centre (le milieu de $[AH]$) qui valent $\left(\frac{21}{10}, \frac{3}{5}\right)$, et le carré de son rayon qui vaut $\frac{1}{4}AH^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{25}+\frac{16}{25}\right) = \frac{17}{100}$. L'équation recherchée est donc $\left(x-\frac{21}{10}\right)^2 + \left(y-\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{17}{100}$, soit $x^2 - \frac{21}{5}x + \frac{441}{100} + y^2 - \frac{6}{5}y + \frac{36}{100} = \frac{17}{100}$, ou encore $x^2+y^2-\frac{21}{5}x-\frac{6}{5}y+\frac{23}{5}=0$. Quitte à tout multiplier par 5, on a presque une équation sympathique : $5x^2+5y^2-21x-6y+23=0$.
   - On peut plus directement dire que le point $M(x,y)$ appartient au cercle de diamètre $[AH]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HM}=0$ (le triangle AHM doit être rectangle en M), donc si $(x-2)\left(x-\frac{11}{5}\right)+(y-1)\left(y-\frac{1}{5}\right)=0$, soit $x^2-\frac{21}{5}x+\frac{22}{5}+y^2-\frac{6}{5}y+\frac{1}{5}=0$. On retrouve bien sûr la même équation.

   Vérifions : $5\times\frac{25}{4}+5\times\frac{1}{4}-21\times\frac{5}{2}-6\times\frac{1}{2}+23 = \frac{130}{4}-\frac{105}{2}+20 = -20+20=0$, donc E est bien sur le cercle. De même, $5\times\frac{484}{169}+5\times\frac{49}{169}-21\times\frac{22}{13}-6\times\frac{7}{13}+23 = \frac{2\,665}{169}-\frac{504}{13}+23 =$

$\frac{205}{13} - \dfrac{504}{13} + 23 = -\dfrac{299}{13} + 23 = 0$. Incroyable, ça marche ! C'est bien sûr normal, puisque par définition des points E et F qui appartiennent aux hauteurs du triangle ABC, les triangles AEH et AFH sont rectangles en E et F respectivement.

5. Un calcul facile pour finir : $\overrightarrow{AO} = \left(-\dfrac{1}{10}, -\dfrac{21}{10}\right)$ et $\overrightarrow{EF} = \left(-\dfrac{21}{26}, \dfrac{1}{26}\right)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs étant nul (on additionne deux quantités opposées), les droites (AO) et (EF) sont bien perpendiulaires.
6. Une démonstration possible : en notant K le point d'intersection des droites (AO) et (EF), on va prouver que les deux triangles AFK et AEH ont les mêmes angles. Comme on l'a déjà signalé plus haut, les points E et F sont tous les deux sur le cercle de diamètre $[AH]$, donc les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{AHE}$ sont égaux (critère de cocyclicité des quatre points A, E, F et H). De plus, le triangle AOB est isocèle en O puisque $OA = OB$ (O est le centre du cercle circonscrit à ABC), donc les angles $\widehat{FAO}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux, notons α leur valeur. On a alors $\widehat{AOB} = \pi - 2\alpha$ (c'est le dernier angle de notre triangle isocèmle). D'après le théorème de l'angle au centre, on a alors $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Dans le triangle ACD qui est rectangle en D, on en déduit alors que $\widehat{DAC} = \alpha$ (les deux angles restants du triangle ayant pour mesures $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$). On a donc prouvé que les angles $\widehat{FAK}$ et $\widehat{HAE}$ sont égaux. Les triangles AFK et AHE ont donc deux angles de même mesure, le dernier angle est aussi égal. Autrement dit, on a $\widehat{AKF} = \widehat{AEH}$. Mais comme ce dernier angle est un angle droit, cela prouve que (AK) et (KF) sont perpendiculaires, ce qu'on voulait démontrer.