Exercice à travailler n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 mai 2020

Des matrices de symétries et de projections.

1. Soit on calcule les images des trois vecteurs de la base canonique (par exemple $f(1,0,0) = (2,-6,9)$) et on les recopie en colonnes dans une matrice carrée, soit on écrit directement sur les lignes de la matrice les coefficients des trois variables x, y et z dans l'expression de f. Dans tous les cas, $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On obtient $M^2 = I_3$. Par exemple, le coefficient en haut à gauche de M^2 sera égal à $2 \times 2 + 2 \times (-6) + 9 = 1$, celui en haut au milieu vaudra $2 \times 2 + 2 \times (-5) + 6 = 0$ etc. Cette égalité se traduit au niveau de l'application par $f^2 = id$, ce qui prouve que l'application f est une symétrie.
3. On commence par déterminer l'espace F par rapport auquel s'effectue la symétrie en cherchant les vecteurs invariants par f, donc en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & z & = & x \\ -6x & - & 5y & - & 2z & = & y \\ 9x & + & 6y & + & 2z & = & z \end{array}\right.$.
   Quitte à tout passer à gauche, on doit donc résoudre $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -6x & - & 6y & - & 2z & = & 0 \\ 9x & + & 6y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. L'opération $L_2 + L_3$ donne $3x - z = 0$, donc $z = 3x$; l'opération $L_3 - L_1$ donne $8x + 4y = 0$ donc $y = -2x$. Si on remplace désormais dans la première équation (ce sera pareil pour les deux autres), on a $x - 4x + 3x = 0$, condition qui est manifestement toujours vérifiée. On se contente donc de conclure que $F = \{(x, -2x, 3x) \mid (x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -2, 3))$.
   De même, on détermine le sous-espace G parallèlement auquel s'effectue la symétrie en résolvant l'équation $f(u) = -u$, soit (en passant à nouveau tout à gauche) le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -6x & - & 4y & - & 2z & = & 0 \\ 9x & + & 6y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Cette fois-ci, les trois équations sont manifestement équivalentes, on ne garde que la condition $z = -3x - 2y$, donc $G = \{(x, y, -3x - 2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -3), (0, 1, -2))$.
4. La famille $\mathcal{B} = ((1, -2, 3), (1, 0, -3), (0, 1, -2))$ est en effet une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est obtenue en regroupant les bases de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. En notant e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs composant cette base, on a par construction $f(e_1) = e_1$; $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = -e_3$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Aucun calcul nécessaire en effet, pour une projection sur F parallèlement à G, on aura toujours $p(e_1) = e_1$, mais $p(e_2) = p(e_3) = 0$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Autre façon de faire, on écrit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 2 * \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) - I_3$, puisqu'on sait que $f = 2p - id$.