Exercice à travailler n°5

PTSI B Lycée Eiffel

14 avril 2020

Un problème mêlant probabilités et matrices.

Le but de ce problème est d'étudier une chaîne de Markov à plus de deux états, pour laquelle de simples calculs sur les suites sont insuffisants. Le problème vous permettra par ailleurs (même si le modèle est extrêmement simpliste) de mieux comprendre les principes de propagations et de « disparition » éventuelle d'un virus qui sont malheureusement au coeur de l'actualité depuis déjà un certain temps.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2 (qui représente la population d'un groupe d'individus), et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

On s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population deux catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, et les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres.
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$ (ou malade, mais en tout cas pas contagieux).

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel n, on a $X_n = 0$, alors on a aussi $X_{n+1} = 0$.

Quelques remarques pour ceux qui voudraient pousser les choses plus loin, le modèle est très imprécis pour deux raisons : le cycle « sain $\to$ contagieux $\to$ sain » condensé sur deux jours n'est évidemment pas très crédible (sans compter que la notion d'immunité n'existe pas du tout ici, un même individu peut tomber malade plusieurs fois) ; de plus on suppose ici une sorte de « déconfinement absolu » puisque chaque individu contagieux peut contaminer chaque individu sain, ce qui suppose un contact rapproché quotidien de tous les individus de la population. Une approche plus crédible serait de considérer que chaque individu va entrer chaque jour en contact avec un certain nombre aléatoire de personnes, seules susceptibles de le contaminer. Bien sûr, plus l'espérance de ce nombre de contacts aléatoire est faible, moins l'individu a de risques de se faire contaminer, c'est tout le principe du confinement que nous vivons depuis un mois.

Pour simplifier l'étude, on suppose dans tout l'exercice que $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On notera par ailleurs $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que R est une matrice inversible, et calculer R^{-1}.

2. (a) Calculer $R^{-1}SR$.

   (b) En déduire l'expression de S^n, pour tout entier naturel n.

3. Soit n un entier naturel fixé.

   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)$.

   (c) Vérifier que, en supposant vérifiée l'hypothèse $X_n = 1$, la variable aléatoire X_{n+1} suit une loi binômiale de paramètre $\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

   (d) Vérifier de même que, en supposant $X_n = 2$, la variable X_{n+1} suivra une loi binômiale de paramètre $\left(1, \frac{5}{9}\right)$.

4. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binômiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Déterminer alors la loi de X_1 et son espérance.

5. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une relation simple entre u_n, v_n, w_n et t_n.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

   (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.

   (d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$.

   (a) Que représente l'évènement F ?

   (b) Montrer que le virus finit par disparaître avec probabilité 1, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.

On remarquera que les calculs mathématiques exacts deviennent impossibles dès qu'on essaie de rendre le modèle un peu plus crédible, et surtout dès qu'on augmente la taille de la population (3 individus, c'est quand même peu). Par contre, on peut bien entendu effectuer des simulations informatiques pour anticiper ce qui peut se produire dans des cas nettement plus complexes.