Exercice à travailler n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 avril 2020

Un problème sur les variables aléatoires.

1. On est exactement dans une situation de schéma de Bernoulli : on répète N fois une même expérience aléatoire ayant une probabilité $\dfrac{1}{6}$ de réussir (la réussite étant ici matérialisée par le fait que le dé tombe sur 6) de manière indépendante, et on compte le nombre de succès. La variable Z suit donc une loi binômiale de paramètre $\left(N, \dfrac{1}{6}\right)$. En particulier (résultats du cours), $E(Z) = \dfrac{N}{6}$ et $V(Z) = N \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \dfrac{1}{-}\right) = \dfrac{5N}{36}$.
2. On sait donc qu'on a obtenu 5 fois le 6 lors de la première phase de l'expérience, et qu'on va simplement lancer cinq fois de suite notre pièce puis compter le nombre de Piles ou de Faces. Là encore, c'est un schéma de Bernoulli ! On en déduit que $X \sim \mathcal{B}(5, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(5, 1-p)$.
3. Bien entendu, dans le cas où $k > n$, la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$ est nulle, on ne peut pas obtenir k Piles si le nombre de lancers de pièce effectués est strictement inférieur à k (ou alors on est plus en cours de mathématiques, mais on migré en sorcellerie à Poudlard). Dans le cas plus raisonnable où $k \leqslant n$, c'est en fait le même principe qu'à la question précédente : quand on connait la valeur de n, le nombre de Piles obtenus suit une loi binômiale de paramètre (n, p), donc $P_{Z=n}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
4. C'est assez immédiat à partir de la question précedente : par définition d'une probabilité conditionnelle, $P((Z = n) \cap (X = k)) = P_{Z=n}(X = k) \times P(Z = n)$, et puisque Z suit une loi binômiale, on sait très bien que $P(Z = n) = \dbinom{N}{n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n}$ (à condition bien entendu d'avoir $N \geqslant n$, sinon cette probabilité est nulle). Les formules demandées en découlent immédiatement.
5. Les évènements $Z = 0$, $Z = 1$, …, $Z = N$ formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X = 0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} P((X = 0) \cap (Z = n)) = \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} \binom{N}{n} p^0 (1-p)^n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$. On reconnait ici la formule du binôme de Newton, ce qui permet de conclure que $P(X = 0) = \left(\dfrac{1-p}{6} + \dfrac{5}{6}\right)^N = \left(1 - \dfrac{p}{6}\right)^N$.
6. On calcule très bêtements les deux membres : à gauche $\dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{N!}{n!(N-n)!} = \dfrac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Et à droite, $\dbinom{N}{k}\dbinom{N-k}{n-k} = \dfrac{N!}{k!(N-k)!} \times \dfrac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!}$ $= \dfrac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Les deux nombres sont bien égaux.

On peut alors écrire, sur le modèle du calcul de la question précédente (la somme part de $n = k$ car la probabilité conditionnelle est nulle si $k > n$), $P(X = k) = \sum_{n=k}^{n=N} \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} = \binom{N}{k}p^k\sum_{n=k}^{n=N}\binom{N-k}{n-k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$. Un petit changement d'indice en posant $j = n - k$ donne alors $P(X = k) = \binom{N}{k}p^k\sum_{j=0}^{j=N-k}\binom{N-k}{j}(1-p)^j\left(\frac{1}{6}\right)^{j+k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-j-k} = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k\sum_{j=0}^{j=N-k}\binom{N-k}{j}\left(\frac{1-p}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-j}$. On reconnait à nouveau une formule du binome de Newton dans la somme pour obtenir $P(X = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k\left(\frac{1-p}{6}+\frac{5}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k}p^k\left(1-\frac{p}{6}\right)N-k$.

7. On reconnait en effet quelque chose de très remarquable : c'est la formule attendue pour une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$. En particulier, on aura bien sûr $E(X) = \frac{Np}{6}$ et $V(X) = \frac{Np(6-p)}{36}$. Un raisonnement identique en remplaçant p par $1-p$ donnerait évidemment $Y \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1-p}{6}\right)$.

8. Dans le cas où $N = 1$, la variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{p}{6}$, ce qui est évidemment logique, puisqu'on a une probabilité $\frac{p}{6}$ de pouvoir lancer une pièce et que celle-ci tombe ensuite sur Pile. Imaginons alors que l'expérience se présente sous une forme légèrement différente de celle de l'énoncé : au lieu de lancer d'abord plein de fois le dé, puis un certain nombre de fois la pièce (selon les résultats obtenus lors des lancers du dé), on effectue N fois de suite l'expérience suivante : on lance le dé, et si (et seulement si) il tombe sur 6 on lance notre pièce déséquilibrée. À la fin des N expériences, on compte le nombre de Piles obtenus. Le résultat sera identique au dispositif de l'énoncé (simplement les lancers de pièce ne sont pas régroupés, ça n'a aucune importance), mais on peut désormais voir notre expérience comme un schéma de Bernoulli : chacune des N expériences a une probabilité $\frac{p}{6}$ de donner un lance de pièce tombant sur Pile, et on répète l'expérience N fois en comptant le nombre de succès, il est tout à fait normal d'avoir $X \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right)$.