Exercice à travailler n°4

PTSI B Lycée Eiffel

13 avril 2020

Un problème sur les variables aléatoires.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers du dé et on compte le nombre de 6 obtenus. En notant n ce nombre, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
- X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
- Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, on a toujours $X+Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent automatiquement la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance (on a le droit d'utiliser certains résultats du cours, c'est même fortement conseillé).
2. On suppose (uniquement pour cette question) que $Z = 5$. Quelles sont alors les lois des variables X et Y ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.
4. Montrer que, pour tout couple d'entiers (k, n) :
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P((Z = n) \cap (X = k)) = 0$.
   - sinon $P((Z = n) \cap (X = k)) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
5. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
6. Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, alors $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$. Calculer alors explicitement (en se débarassant de la somme) la probabilité $P(X = k)$.
7. Reconnaitre la loi de X, en déduire son espérance et sa variance. Donner (sans calcul !) la loi de la variable Y.
8. Quel résultat évident trouve-t-on dans le cas où $N = 1$? Comment aurait-on pu exploiter ce résultat pour trouver les lois de X et de Y (presque) sans calcul ?