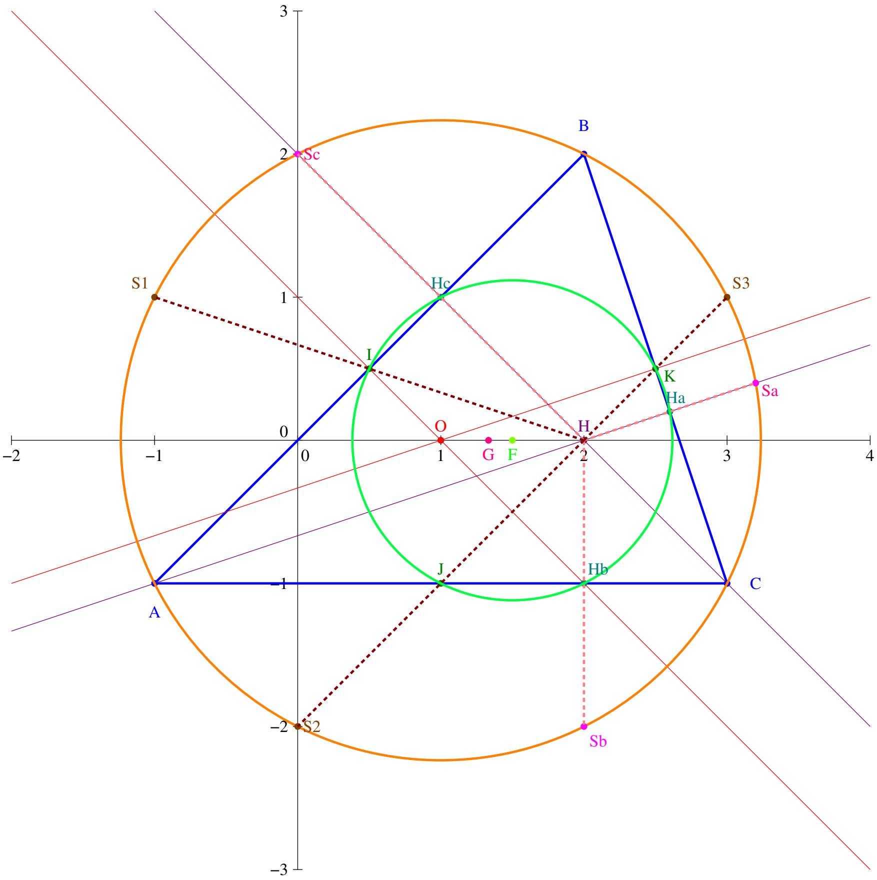
Exercice à travailler n°18 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2020

Cercles remarquables dans un triangle.

1. Voici une belle figure évidemment faite à l'ordinateur, avec tous les points et droites évoquées dans l'exercice (on a volontairement omis les médianes, ainsi que la médiatrice et la hauteur dont on n'a pas exploité les équations, pour tenter de ne pas trop surcharger la figure) :



2. Un calcul facile pour commencer, on fait simplement la moyenne des coordonnées des trois points : $x_G = \dfrac{-1+2+3}{3} = \dfrac{4}{3}$ et $y_G = \dfrac{-1+2-1}{3} = 0$, donc $G\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$.
3. Commençons par donner les coordonnées des milieux qui vont servir par la suite : le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et le milieu K du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. On peut maintenant calculer facilement les équations des médiatrices demandées : un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$. Comme $\overrightarrow{AB}(3,3)$ et $\overrightarrow{IM}\left(x - \dfrac{1}{2}, y - \dfrac{1}{2}\right)$, on obtient donc l'équation $3\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + 3\left(y - \dfrac{1}{2}\right) =$

0, soit $3x+3y-3=0$ ou encore $x+y-1=0$. On procède de même pour l'autre médiatrice : on doit cette fois-ci avoir $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BC}=0$. Comme $\overrightarrow{BC}(1,-3)$, on trouve cette fois l'équation $x-\dfrac{5}{2}-3\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$, soit $x-3y-1=0$.

Le point O se situe à l'intersection des deux médiatrices dont on vient de calculer les équations. Ses coordonnées sont donc solution du système $x+y-1=x-3y-1=0$. En soustrayant les deux équations, on a $4y=0$, donc $y=0$, et $x=1$. Voila des résultats bien sympathiques : $O(1,0)$.

Le rayon du cercle circonscrit est égal aux distances OA, OB et OC, qui sont évidemment égales et valent toutes $\sqrt{5}$. Une équation cartésienne du cercle est donc $(x-1)^2+y^2=5$, ou encore sous forme développée $x^2+y^2-2x-4=0$.

4. La hauteur issue de A est définie par l'équation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$, soit $(x+1)-3(y+1)=0$ ou encore $x-3y-2=0$ (on reprend bien sûr certains calculs de coordonnées déjà effectués auparavant). La hauteur issue de C a pour équation $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$, soit $3(x-3)+3(y+1)=0$, ou encore (en divisant tout par 3) $x+y-2=0$. L'orthocentre H étant situé à l'intersection de ces deux hauteurs, ses coordonnées satisfont le système $x-3y-2=x+y-2=0$. On obtient encore une fois $y=0$ en soustrayant les équations, et on en déduit immédiatement $H(2,0)$ (vraiment, le concepteur de cet exercice a bien choisi les coordonnées des points).

5. Les trois points sont trivialement alignés sur l'axe des abscisses du repère, et $\overrightarrow{GH}=\left(-\dfrac{2}{3},0\right)=2\overrightarrow{OG}$.

6. On a déjà calculé les coordonnées des milieux des côtés plus haut. Si on veut calculer les coordonnées du symétrique de H par rapport à I (notons donc S_1 ce point), on cherche donc un point qui vérifie $\overrightarrow{HS_1}=2\overrightarrow{HI}$, donc $x_{S_1}=x_H+2(x_I-x_H)=2x_I-x_H=1-2=-1$. De même, on a bien sûr $y_{H_1}=2y_I-y_H=1-0=1$. Notre premier symétrique a donc pour coordonnées $(-1,1)$ et on vérifie sans problème qu'il est sur le cercle d'équation $x^2+y^2-2x=4$.

   On effectue le même genre de calcul pour les deux autres symétriques. Notons S_2 le symétrique de H par rapport au milieu J de $[AC]$, on commence par écrire les coordonnées de ce point : $J(1,-1)$ alors $x_{S_2}=2x_J-x_H=2-2=0$ et $y_J=2y_J-y_H=-2-0=-2$. On a donc $S_2(0,-2)$. Là encore l'équation du cercle est trivialement vérifiée.

   Dernier symétrique, on note S_3 le symétrique par rapport à K et on calcule de même $x_{S_3}=2x_K-x_H=5-2=3$ et $y_{S_3}=2y_K-y_H=1-0=1$. On trouve donc $S_3(3,1)$, qui est encore une fois facilement sur le cercle puisque $3^2+1^2-6=4$.

7. Calculer les symétriques par rapport aux côtés est un peu plus pénibles. Notons par exemple S_a le symétrique de H par rapport à (BC), on peut voir S_a comme le symétrique de H par rapport à son projeté orthogonal H_a sur cette même droite (BC). Commençons donc par calculer les coordonnées de ce projeté H_a. Par définition, on a $\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH_a})=0$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{HH_a}=0$. En notant (x,y) les coordonnées du projeté, $\overrightarrow{BC}=(1,-3)$, $\overrightarrow{BH_a}=(x-2,y-2)$ et $\overrightarrow{HH_a}=(x-2,y)$, donc on doit avoir $y-2+3(x-2)=0$ et $x-2-3y=0$, soit $y+3x=8$ et $x-3y=2$. Une résolution de système passionnante donne $H_a\left(\dfrac{13}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

   On utilise ensuite les mêmes calculs que dans la question précédente pour le symétrique par rapport à ce point : $x_{S_a}=2x_{H_a}-x_H=\dfrac{26}{5}-2=\dfrac{16}{5}$ et $y_{S_a}=2y_{H_a}-y_H=\dfrac{2}{5}$. On trouve donc $S_a\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{2}{5}\right)$. Vérifions qu'il appartient bien à notre cercle circonscrit : $x_{S_a}^2+y_{S_a}^2-2x_{S_a}-4=\dfrac{256}{25}+\dfrac{4}{25}-\dfrac{32}{5}-4=\dfrac{52}{5}-\dfrac{32}{5}-4=0$, ça marche.

   Il ne reste plus qu'à faire pareil pour les deux autres côtés. Notons de façon similaire S_b le symétrique par rapport à (AC) et H_b le projeté orthogonal sur (AC). Le point $H_b(x,y)$ vérifie $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH_b})=0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HH_b}=0$. Comme $\overrightarrow{AC}=(4,0)$, $\overrightarrow{AH_b}=(x+1,y+1)$ et

$\overrightarrow{HH_b} = (x-2, y)$, on obtient les deux équations $4(y+1) = 0$ et $4(x-2) = 0$. On en déduit assez trivialement que $H_b(2,-1)$, puis $S_b(2,-2)$ (je vous épargne le détail, ici les calculs sont vraiment à la portée de tout le monde, on aurait presque pu prétendre que ça se voyait sur le dessin). Ce point est bien sur le cercle puisque $2^2 + (-2)^2 - 2 \times 2 - 4 = 0$.

Dernier symétrique à calculer, le symétrique S_c par rapport à (AB). On notera encore une fois H_c le projeté prthogonal de H sur (AB). On a cette fois-ci les conditions $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH_c}) = 0$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HH_c} = 0$, avec $\overrightarrow{AB} = (3,3)$, $\overrightarrow{AH_c} = (x+1, y+1)$ et $\overrightarrow{HH_c} = (x-2, y)$. On a cette fois les équations $3(y+1) - 3(x+1) = 0$ et $3(x-2) + 3y = 0$ soit en simplifiant tout par 3 les conditions $y - x = 0$ et $x - 2 + y = 0$. On trouve donc $H_c(1,1)$, puis $S_c(0,2)$ (encore une fois les calculs sont triviaux), point qui est bien sur notre cher cercle circonscrit.

8. Un calcul facile pour les coordonnées de $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Puisque le cercle circonscrit avait un rayon $\sqrt{5}$, on cherche donc une équation du cercle de centre F et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. La voici : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$, donc $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 = \frac{5}{4}$, ce qui se simplifie assez gentiment en $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$.

9. Il suffit de vérifier à chaque fois que les coordonnées des points vérifient l'équation obtenue à la question précédente. Pour le point I, on a $x_I^2 + y_I^2 - 3x_I + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$, c'est bon. Pour le point J, $1+1-3+1 = 0$, tout va bien. Et pour le point K, $\frac{25}{4} + \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 1 = 0$ est également vérifié. Les milieux des segments reliant H aux sommets du triangle ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $(2,1)$ et $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, qui sont tous les trois sur le cercle : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$ (c'est en fait le même calcul que pour I), $4+1-6+1 = 0$ et $\frac{25}{4} + \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 1 = 0$ (même calcul que pour K). Restent à vérifier les trois pieds des hauteurs, qui sont en fait les points H_a, H_b et H_c utilisés à la question 7. On a donc déjà les coordonnées, il ne reste qu'à vérifier la compatibilité avec l'équation de cercle. Pour H_a, le calcul est superbe : $\frac{169}{25} + \frac{1}{25} - \frac{39}{5} + 1 = \frac{34}{5} - \frac{39}{5} + 1$, ça marche. Beaucoup plus tranquille pour H_b : $4 + 1 - 6 + 1 = 0$, et pour H_c : $1 + 1 - 3 + 1 = 0$.