Exercice à travailler n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2020

Un exercice de probabilités hors-programme.

1. Il ne s'agit pas d'une loi usuelle, on va donc calculer les différentes probabilités une par une « à la main ». Pour avoir $X = 1$, il faut que le joueur passe le niveau 1 (ce qui est automatique vu les conditions imposées dans l'énoncé), mais qu'il perde au niveau 2, donc $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. De même, pour avoir $X = 2$, le joueur devra réussir le niveau 1 (automatique), réussir le niveau 2 (probabilité $\frac{1}{2}$) et échouer au niveau 3 (probabilité $\frac{2}{3}$, puisqu'on a une probabilité $\frac{1}{3}$ de passer ce troisième niveau), soit $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ensuite on aura $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$, puis plus généralement $P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$. Cette formule est valable pour tout entier $k \geqslant 1$.
2. On voit bien qu'il s'agit d'une série de type exponentiel, mais il va falloir bidouiller un peu pour se ramener au cas du cours. Travaillons avec une somme partielle : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Curieusement, même pas besoin ici de faire intervenir les exponentielles puisque cette somme est télescopique. C'est un télescopage simple qui donne $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Cette somme a bien sûr pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$, on peut donc dire que la série converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$. Cela signifie que, quand on regroupe les différents événements $X = 1$, $X = 2$ etc (qui sont disjoints), on obtient une probabilité totale égale à 1. Autrement dit, il est presque certain qu'un de ces événements va être réalisé, c'est-à-dire que le joueur va finir par perdre. On utilise le terme « presque certain » dans le cas des univers infinis car, bien que sa probabilité soit nulle, l'événement « le joueur ne perd jamais » est théoriquement possible.
3. On cherche donc la nature et la somme de la série $\sum \frac{k^2}{(k+1)!}$ (en partant de $k = 1$). On va en fait exploiter le même genre d'astuce « belge » qu'à la question précédente, en partant encore une fois de la somme partielle pour ne pas prendre de risque : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{(k+1)!} - \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. On a décalé les indices dans la première somme pour reconnaitre une somme partielle de série exponentielle convergeant vers e (le fait qu'on s'arrête à $n - 1$ au lieu de n ne change rien), et la deuxième somme converge vers 1, c'est exactement celle de la question précédente ! Notre série est donc une somme de deux séries convergentes, elle converge vers $e - 1$. Autrement dit, $E(X) = e - 1$

(sous les hypothèses faites, le joueur passera en moyenne $e-1$ niveaux avant de perdre ; sachant qu'il passe toujours le premier niveau autant dire qu'il perdre souvent très rapidement ensuite, puisque $e-1 \simeq 1,7$).

4. Si on veut appliquer la formule de König-Huygens, il faut calculer $E(X^2)$, et pour cela appliquer comme toujours le théorème du transfert et chercher à calculer la somme de la série $\sum \frac{k^3}{(k+1)!}$. Comme on ne change pas une équipe qui gagne, on va à nouveau trafiquer la somme partielle à coup d'astuce belge : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3-k}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(k+1)}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. La deuxième somme, on la connait, elle converge vers 1. Quand à la première, on peut la faire partir de $k=2$ (le terme d'indice 1 est de toute façon nulle) et simplifier pour obtenir $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$, qui est une somme partielle de série exponentielle convergeant vers e. On en déduit que notre série converge, et surtout que $E(X^2) = e+1$. On peut donc appliquer la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-e^2+2e-1 = 3e-e^2 = e(3-e)$. Bon point pour nous, on trouve une variance positive. Comme $3-e$ est un nombre proche de 0, cette variance est assez faible, ce qui prouve que notre joueur va en fait très souvent réussir un nombre de niveaux égal à 1 ou 2, et nettement plus rarement s'éloigner significativement de la moyenne.

Pour l'exercice en complément, la probabilité de tirer la boule blanche au tirage numéro k vaut toujours $\frac{1}{k+1}$ (puisqu'il y a toujours exactement une bouble blanche dans l'urne, mais que le nombre de boules noires augmente régulièrement et est donc égal à k). Pour avoir $X=k$, on doit tirer une boule noire aux $k-1$ premiers tirages et finir par tirer une boule blanche au tirage numéro k, ce qui se produit avec une probabilité $P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. La série correspondante $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ se calcule en faisant une toute petite décomposition en éléments simples puis un télescopage : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, qui converge effectivement vers 1 (je vous épargne les détails de calcul, c'est pas dur). Par contre, la série de terme général $\sum kP(X=k)$ est la série de terme général $\sum \frac{1}{k+1}$ qui diverge effectivement (à un petit décalage près, il s'agit de la série harmonique). J'ai écrit le petit programme suivant pour simuler cette expérience (le programme simulation effectue une expérience, la variable boule désignant le nombre total de boules dans l'urne, qu'on augmente jusqu'à tirer la boule numéro 1 qui représente la boule blanche). J'ai ensuite créé une liste dans laquelle j'ai stocké les résultats de 20 expériences successives.

```
from random import randint
def simulation() :
    boules=2
    while randint(1,boules) !=1 :
        boules+=1
    return boules-1

liste=[]
for i in range(20) :
    l.append(simulation())
print(liste)
```

Voici pour information la liste obtenue lors de ma première tentative :
$[1, 6, 1, 3, 8, 3, 3, 56, 4, 13, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 2]$, ce qui n'indique évidemment rien de très exploitable, puisque sur un nombre fini de tentatives on aura bien sûr toujours une moyenne finie du nombre d'essais. Ce qu'on peut tout de même constater, c'est qu'on a très souvent des petites valeurs de X (on a en moyenne $X = 1$ la moitié du temps), mais que, quand on dépasse 3 ou 4, on peut facilement monter très haut (sur d'autres tentatives j'ai eu des valeurs de X de l'ordre de plusieurs milliers). Ce n'est pas vraiment suffisant pour avoir une compréhension intuitive de ce phénomène d'espérance infinie, hélas.