Exercice à travailler n°8

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2020

Un exercice de probabilités hors-programme.

Pour faire le lien entre les séries numériques et les probabilités, un petit exercice faisant intervenir des variables aléatoires infinies (et donc hors-programme pour vous cette année !). Un élève de PTSI confiné joue aux jeux video au lieu de bosser ses maths. Il joue à un jeu comportant une infinité de niveaux numérotés 1, 2, 3, etc. Il commence au niveau 1, puis essaye le niveau 2 s'il a réussi le niveau 1 etc. La probabilité qu'il réussisse le niveau k (en supposant bien sûr qu'il ait déjà passé les précédents) vaut $\frac{1}{k}$. On note X le nombre de niveaux réussis par l'élève avant qu'il ne perde.

1. Calculer, pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité $P(X = k)$.
2. Vérifier que la série de terme général $P(X = k)$ est convergente, et que sa somme est égale à 1. Comment interpréter ce résultat en termes de probabilités ?
3. L'espérance d'une variable aléatoire de ce type se calcule via la somme de la série $\sum k \times P(X = k)$, à condition bien sûr que celle-ci converge ! Vérifier que c'est le cas ici, et calculer $E(X)$.
4. Pour les plus motivés, on admet que la formule de König-Huygens reste valable pour ce genre de variable aléatoire. Calculer $E(X^2)$, et en déduire la variance $V(X)$ de la variable X.

En complément, on considère l'exéprience suivante : une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans cette urne avec les règles suivantes :

- si on tire la boule blanche, on arrête le jeu et on note X le nombre de tirages effectués.
- si on tire une boule noire, on continue après avoir remis la boule noire dans l'urne et **ajouté une boule noire supplémentaire** dans l'urne (le deuxième tirage éventuel se fera donc avec deux boules noires et une boule blanche, le troisième avec trois boules noires et une boule blanche etc.).

Calculer pour tout entier $k \geqslant 1$ la probabilité $P(X = k)$, vérifier que la série de terme général $P(X = k)$ converge vers 1 mais que la série de terme général $k \times P(X = k)$ ne converge pas (ce qui signifie en gros qu'on finira par tirer la boule blanche avec probabilité 1, donc que cet événement est quasi certain, mais pourtant que le nombre moyen d'essais avant de la tirer est infini. Étonnant, non ?). Les plus curieux pourront s'amuser à essayer de faire des simulations de cette expérience avec Python (attention quand même, il vaut mieux limiter le nombre d'essais autorisés, ça peut monter très très haut de temps à autre, c'est d'ailleurs pour ça que l'espérance est infinie).