Exercice à travailler n°17 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2020

Approximations géométriques de π.

1. (a) Le point O est le centre de chacun des deux triangles équilatéraux, il est donc situé aux deux tiers de leur hauteur. Ce même point O étant par définition situé à une distance 1 de chacun des trois sommets du triangle intérieur au cercle, ce triangle a donc une hauteur de $\frac{3}{2}$, et donc un côté égal à $\frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. On peut aussi retrouver ce côté avec un petit calcul sur les nombres complexes : il est égal à $|1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}|$ (si vous ne voyez pas pourquoi, je vous laisse revoir votre cours sur les complexes), soit $\left|1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

   Pour le triangle extérieur au cercle, la distance 1 est cette fois-ci la distance entre le centre O et le pied de chaque hauteur, donc ces hauteurs ont une longueur 3 et le côté du triangle est égal à $2\sqrt{3}$.

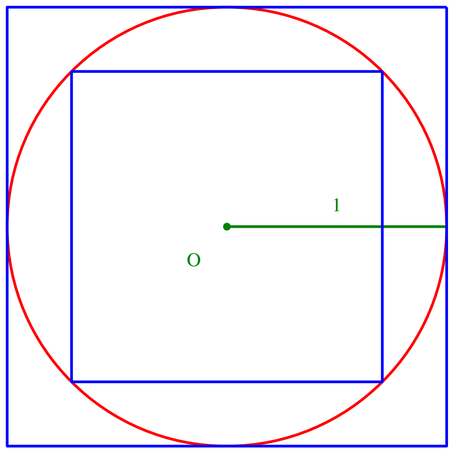
   Le triangle intérieur a donc un périmètre égal à $2\sqrt{3}$, le triangle extérieur à $6\sqrt{3}$. Un triangle équilatéral de côté a a une aire égale à $a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, donc notre triangle intérieur a une aire égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, et le triangle extérieur une aire égale à $3\sqrt{3}$.

   (b) J'ai déjà parlé de complexes plus haut, allons-y pour un calcul de déterminant. En considérant que le point O est le centre d'un repère orthonormal, on peut placer les sommets du triangle intérieur aux coordonnées $A(0,1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (on utilise par exemple les racines cubiques de l'unité pour s'en rendre compte). On calcule alors $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Il reste à diviser par 2 la valeur absolue de ce déterminant pour retrouver l'aire calculée plus haut. C'est exactement pareil pour le triangle extérieur, mais avec des facteurs 2 partout.

   (c) Le périmètre du cercle trigonométrique, qui vaut bien sûr 2π, est compris entre ceux des deux triangles, donc on obtient le premier encadrement $\sqrt{3} \leqslant \pi \leqslant 3\sqrt{3}$, soit environ $1,73 \leqslant \pi \leqslant 5,20$. C'est évidemment extrêmement mauvais. L'aire du disque, égale à π, est compris entre les aires deux triangles, ce qui donne cette fois $\frac{3\sqrt{3}}{4} \leqslant \pi \leqslant 3\sqrt{3}$, soit environ $1,30 \leqslant \pi \leqslant 5,20$, ce qui est encore pire ! Il vaut donc mieux garder les périmètres.

   (d) On obtiendrait ici $\pi \simeq 2\sqrt{3} \simeq 3,46$. C'est encore loin du compte.

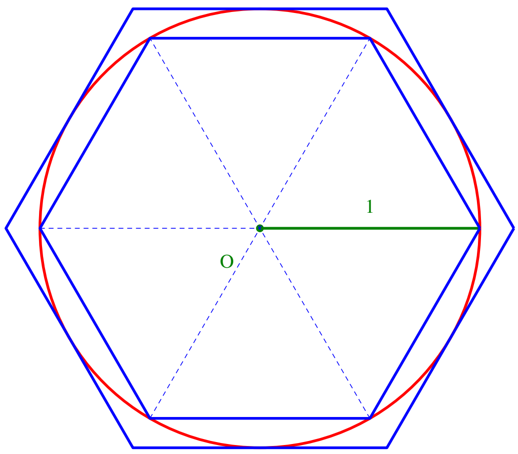
2. (a) Voici la belle figure demandée :



(b) Le carré intérieur a une diagonale de longueur 2, donc un côté égal à $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Son périmètre sera donc égal à $4\sqrt{2}$. Pour le carré extérieur, c'est tout simplement le côté qui égal à 2 (le diamètre du cercle rejoignant deux points de tangence entre le cercle et le carré a même longueur que les côtés du carré). Il a donc pour périmètre 8. On déduit de ces valeurs l'encadrement $2\sqrt{2} \leqslant \pi \leqslant 4$, ce qui est un peu moins minable que précédemment.

(c) En faisant la moyenne, on trouve $\pi \simeq 2 + \sqrt{2} \simeq 3,41$. On se rapproche un peu, mais bien lentement.

3. Dans le cas des hexagones (cf figure ci-dessous), chacun des hexagones peut être découpé en six triangles équilatéraux (en effet, ces triangles ont deux côtés égaux encadrant un angle égal à $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$, ils sont donc équilatéraux). Le côté de l'hexagone intérieur est donc égal au rayon du cercle, donc à 1. Autrement dit, cet hexagone a un périmètre égal à 6. Pour l'hexagone extérieur, c'est la hauteur de l'un des triangles équialatéraux qui est égale à 1, le côté des triangles vaut donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et le périmètre de l'hexagone est égal à $\dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

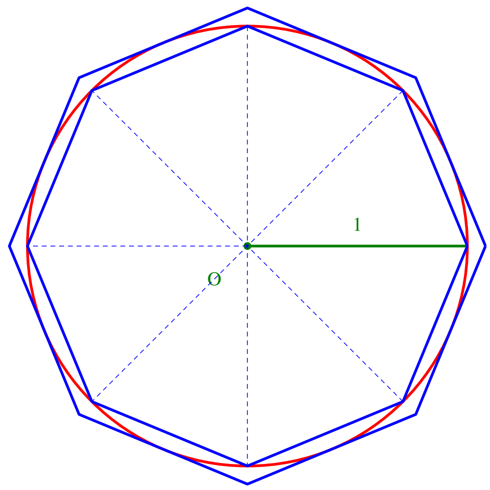


L'encadrement de π obtenu à l'aide des périmètres des deux hexagones est donc $3 \leqslant \pi \leqslant 2\sqrt{3}$

(ça commence à se rapprocher) et l'approximation à l'aide de la moyenne des périmètres est $\pi \simeq \dfrac{3}{2} + \sqrt{3} \simeq 3,23$.

Si on recommence avec des octogones, on peut cette fois découper les octogones en huit triangles isocèles d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{4}$ (cf figure ci-dessous). Dans le cas de l'octogone intérieur, ces triangles isocèles ont deux côtés de longueur 1, le côté a de l'octogone étant le troisième côté de ces triangles isocèles, il vérifie (relation d'Al-Kashi) $a^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$, donc $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ (il existe d'autres méthodes pour retrouver ce côté, par exemple en utilisant des triangles rectangles, mais qui peuvent nécessiter la connaissance de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$). Notre octogone intérieur a donc pour périmètre $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Pour l'octogone extérieur, on échappe encore plus difficilement à un peu de calculs trigonométriques. Cette fois-ci, c'est la hauteur des triangles isocèles qui est égale à 1. En notant a le côté de notre octogone, on peut construire, en coupant un de nos triangles isocèles en deux, un triangle rectangle dont l'un des angles vaut $\dfrac{\pi}{8}$, et les deux côtés de l'angle droit ont pour longueur 1 et $\dfrac{a}{2}$. On en déduit que $\dfrac{a}{2} = \tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, donc $a = 2(\sqrt{2}-1)$ (si on ne connait pas la valeur de la tangente, on la retrouve rapidement à coups de formules de duplication, cf les exercices du chapitre de trigonométrie). Le périmètre de l'octogone extérieur vaut donc $16(\sqrt{2}-1)$.



L'encadrement de π obtenu cette fois-ci est donc $4\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \pi \leqslant 8(\sqrt{2}-1)$, soit pour donner des valeurs un peu plus concrètes $3,06 \leqslant \pi \leqslant 3,31$. Avec la moyenne des deux périmètres, on trouve $\pi \simeq 2\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4(\sqrt{2}-1) \simeq 3,19$. Comme on peut le constater sur les différents calculs effectués dans cet exercice, la convergence est assez lente, et la méthode en fait peu adaptée au calcul de bonnes approximations de π.