Exercice à travailler n°17

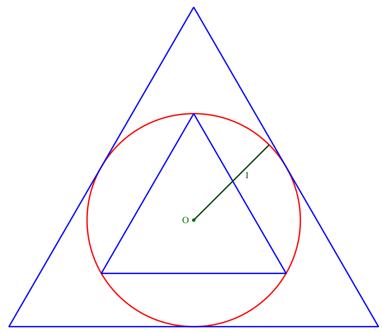
PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2020

Approximations géométriques de π.

La méthode décrite ici est celle qui a servi notamment à Archimède à calculer les premières valeurs approchées raisonnables du nombre π.

1. On « encadre » un cercle de rayon 1 par deux triangles équilatéraux comme illustré dans la figure ci-dessous (le cercle est donc circonscrit au triangle intérieur et inscrit dans le triangle extérieur) :



   (a) Calculer le côté de chacun des deux triangles, en déduire leurs périmètres et leurs aires.
   (b) Pour vous entrainer, retrouver l'aire des deux triangles par au moins une autre méthode (soit en utilisant les nombres complexes et pourquoi pas les racines de l'unité, soit en ayant recours à des calculs de coordonnées et de déterminant).
   (c) Déduire des calculs d'aire et de périmètre deux encadrements différents du nombre π. Lequel des deux est le meilleur ?
   (d) En pratique, Archimède approchait π par la moyenne des deux périmètres obtenus. Donner la valeur obtenue avec nos deux triangles.

2. Pour améliorer notre encadrement de π, on remplace les triangles équilatéraux par des carrés.
   (a) Faire une figure où notre cercle de rayon 1 (on n'est pas obligé de respecter cette longueur sur la figure, peu importe l'unité choisie) passe par les quatre sommets du carré intérieur, et est tangent aux quatre côtés du carré extérieur.
   (b) Calculer les côtés des deux carrés, en déduire leur périmètre et un nouvel encadrement de π.
   (c) Faire la moyenne des deux périmètres et comparer la valeur approchée obtenue avec celle déduite des périmètres de triangles équilatéraux.

3. Comme vous n'avez que ça à faire et que vous êtes courageux, recommencer les mêmes calculs avec deux hexagones, puis avec deux octogones. Archimède a utilisé pour son approximation des polygones à 96 côtés, je ne vous demanderai pas d'aller jusqu-là (en fait on peut « tricher » car doubler le nombre de côtés du polygone est relativement facile).