Exercice à travailler n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 avril 2020

Un exercice de probabilités banal pour réviser le dénombrement.

1. Commençons déjà par signaler que, puisqu'on travaille pour l'instant avec des tirages simultanés, il est cohérent de prendre comme univers Ω l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi les neuf que contient l'urne, et donc de considérer que $|\Omega| = \binom{9}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$. Ensuite, avoir un plus grand numéro inférieur à 7 revient simplement à dire qu'on a tiré trois boules dont les numéros sont compris entre 1 et 7, ce qui donne $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$ cas favorables. La probabilité reherchée vaut donc $\dfrac{35}{84} = \dfrac{5}{12}$.
2. Il faut distinguer deux possiblités : soit on tire trois boules rouges, soit trois boules bleues (les deux cas sont bien sûr incompatibles). Comme il y a dans l'urne cinq boules rouges et quatre boules bleues, cela nous donne au total $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$ cas favorables. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{14}{84} = \dfrac{1}{6}$.
3. Il faut donc tirer une boule « divisible par 3 » parmi les trois disponibles, et deux boules « non divisibles par 3 » parmi les six autres boules, ce qui fait $\binom{3}{1} \times \binom{6}{2} = 3 \times 15 = 45$ cas favorables. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$.
4. On ne peut pas faire autrement que de séparer deux cas : soit on tire trois boules rouges, soit on tire exactement deux boules rouges parmi les cinq disponibles, et une boule bleue parmi les quatre disponibles. Soit au total $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 + 10 \times 4 = 50$ cas favorables. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{50}{84} = \dfrac{25}{42}$.
5. Là il n'y a pas vraiment d'autre choix que de compter les cas à la main. Ça tombe bien, ils ne sont vraiment pas nombreux : 521 (il n'y a pas d'ordre à prendre en compte puisque les tirages sont simultanés), 431, 421 ou 321, soit quatre cas favorables. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$.
6. Puisque les tirages sont désormais successifs avec remise, on va modifier l'univers pour considérer désormais des 3-listes d'éléments dans notre ensemble de 9 boules, ce qui imposera $|\Omega| = 9^3 = 729$. On reprend les cinq questions précédentes dans l'ordre :
   - le nombre de cas favorables vaut désormais 7^3, soit une probabilité de $\dfrac{7^3}{9^3} = \dfrac{343}{729}$.
   - on continue à distinguer nos deux possibilités : on a 5^3 tirages avec trois boules rouges, et 4^3 avec trois boules bleues, donc une probabilité égale à $\dfrac{125 + 64}{729} = \dfrac{189}{729} = \dfrac{7}{27}$.
   - il faut toujours choisir notre boule « disible par 3 » (trois choix possibles) et les deux autres boules tirées (6×6 choix possibles) mais aussi la position de la boule divisible par

3 parmi les trois tirages, ce qui donne $3 \times 6^2 \times 3$ tirages possibles, et donc une probabilité égale à $\dfrac{9 \times 6^2}{729} = \dfrac{4}{9}$.

- encore une fois on sépare les deux : 5^3 tirages avec trois boules rouges, et $5^2 \times 4 \times 3$ (il faut à nouveau choisir la position du tirage de la boule bleue) tirages avec exactement deux boules rouges, soit une probabilité égale à $\dfrac{125 + 300}{729} = \dfrac{425}{729}$.
- là encore, il va falloir compter à la main, et ça va être nettement plus pénible que la première fois. Allons-y quand même, en faisant attention à l'ordre : trois cas « $6 + 1 + 1$ » (il faut choisir la position du 6), six cas « $5 + 2 + 1$ » (cette fois-ci il faut compter les six permutations possibles quand les trois chiffres sont distincts), trois cas « $5 + 1 + 1$ », six cas « $4 + 3 + 1$ », trois cas « $4 + 2 + 2$ », six cas « $4 + 2 + 1$ », trois cas « $4 + 1 + 1$ », trois cas « $3 + 3 + 2$ », trois cas « $3 + 3 + 1$ », trois cas « $3 + 2 + 2$ », six cas « $3 + 2 + 1$ », trois cas « $3 + 1 + 1$ », un seul cas « $2 + 2 + 2$, trois cas « $2 + 2 + 1$ », trois cas « $2 + 1 + 1$ » et enfin le dernier cas « $1 + 1 + 1$ ». Ouf, on a tout ! Ce qui nous fait 56 cas au total, donc une probabilité de $\dfrac{56}{729}$.