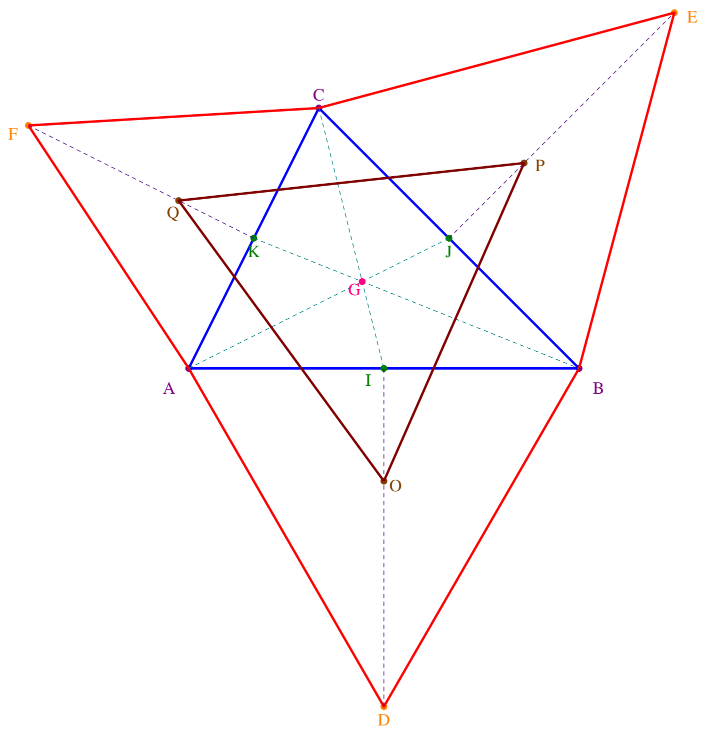
Exercice à travailler n°16 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 juin 2020

Le théorème de Napoleon.

1. Une belle figure sur laquelle figure aussi le centre de gravité commun des deux triangles (ainsi que les médianes permettant de le situer).



2. La distance BO représentant les deux tiers d'une hauteur du triangle équilatéral ABD (puisque le point O est entre autres le centre de gravité de ce triangle), on a $BO = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ (rappelons pour ceux qui l'auraient oublié que, dans un triangle équilatéral de côté a, la distance entre un sommet et le milieu du côté opposé vaut $\frac{a\sqrt{3}}{2}$). Exactement de la même façon, on prouve que $BP = \frac{BE}{\sqrt{3}}$ en exploitant le triangle équilatéral BCE. Enfin, on peut remarquer que $\widehat{OBP} = \widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBP} = \frac{\pi}{6} + \widehat{ABC} + \frac{\pi}{6} = \widehat{ABC} + \frac{\pi}{3}$ (on utilise en passant que la droite (BO) est bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$, qui est lui-même l'un des angles d'un trianglé équilatéral, d'où les valeurs calculées). Or, $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} + \widehat{CBE} = \widehat{ABC} + \frac{\pi}{3}$. On a donc dans les triangles ABE et OBP deux paires de côtés proportionnels (AB et BE

d'un côté, OB et BP de l'autre) encadrant des angles de même mesure, les triangles sont alors semblables. De plus, le rapport de similitude entre les deux triangles est le rapport de proportionnalité calculé entre les côtés, donc $\sqrt{3}$ si on part de OBP pour le transformer en ABE. En particulier, le troisième côté de chaque triangle vérifie la même proportionnalité, ce qui prouve que $AE = \sqrt{3} \times OP$.

Pour la deuxième égalité, on prouve de même que les triangles QCP et ACE sont semblables de rapport $\sqrt{3}$. En effet, on a $CA = \sqrt{3}CQ$, $CE = \sqrt{3}CP$ et $\widehat{ACE} = \widehat{QCP} = \widehat{ACB} + \frac{\pi}{3}$ (ce sont exactement les mêmes raisonnements que précédemment). On en déduit de même que $AE = \sqrt{QP}$. Le triangle OQP est donc isocèle en P. Mais en fait, on aurait pu faire exactement le même raisonnement avec n'importe quel sommet du triangle (en échangeant le rôle des points A, B et C) et prouver de même que le triangle est aussi isocèle en O ou en Q (dans ce dernier cas, on prouverait que $QP = OQ = \frac{BF}{\sqrt{3}}$). Le triangle est donc bien équilatéral.

3. (a) Une équation de la droite passant par l'origine A du repère et par le point $C(a,b)$ est simplement $bx - ay = 0$ (ou si on préfère les équations « standard » de droite $y = \frac{b}{a}x$). Pour la deuxième droite demandée, on va faire un vrai calcul en utilisant les méthodes conseillées. On a $\overrightarrow{BC}(a-1,b)$, un point $M(x,y)$ appartient donc à la droite (BC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$, donc si $b(x-1)-(a-1)y = 0$, ou encore $bx-(a-1)y = b$.

   (b) Pas vraiment de calcul à faire ici : $I\left(\frac{1}{2},0\right)$, $J\left(\frac{a+1}{2},\frac{b}{2}\right)$ et $K\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

   (c) La distance IO représente le tiers d'une hauteur du triangle équilatéral ABD, donc $IO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (puisqu'on a décrété que $AB = 1$). Le point O étant situé sur la médiatrice du segment $[AB]$ dont l'équation est simplement $x = \frac{1}{2}$, il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ (signe négatif pour l'ordonnée pour qu'il soit en-dehors du triangle, en supposant pour toute la suite de l'exercice que $b > 0$). Pour la suite, on mettra toutes les coordonnées au même dénominateur pour simplifier les calculs, donc $O\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

   Les calculs vont devenir un peu plus pénibles pour le point Q. Il est situé sur la médiatrice du segment $[AC]$, qui passe bien sûr par le milieu K du segment. Cette médiatrice admet pour vecteur directeur tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. Comme ce dernier vecteur a pour coordonnées (a,b), le vecteur $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur de la médiatrice « dirigé vers Q » et de norme égale à la distance AC. Or, on a, pour les mêmes raisons que pour le point I tout à l'heure, $KQ = \frac{1}{2\sqrt{3}}AC$, donc $\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{u}$. On en déduit facilement les coordonnées du point : $Q\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{3}}, \frac{b}{2} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}a - b}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b + a}{2\sqrt{3}}\right)$.

   On effectue un calcul très similaire pour le dernier point : la médiatrice du segment $[BC]$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{(}b, 1-a)$, qui est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et de même norme que lui, et $JP = \frac{1}{2\sqrt{3}}BC$, donc $\overrightarrow{JP} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{v}$ (on s'est arrangés pour que ce vecteur directeur pointe bien vers l'extérieur du triangle), ce qui permet de calculer $P\left(\frac{a+1}{2} + \frac{b}{2\sqrt{3}}, \frac{b}{2} + \frac{1-a}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3} + b}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b + 1 - a}{2\sqrt{3}}\right)$.

   (d) Pour alléger un tout petit peu le calcul, on peut calculer les carrés des trois distances et surtout se débarasser du dénominateur :

- $12OP^2 = (\sqrt{3}a+b)^2 + (\sqrt{3}b-a+2)^2 = 3a^2 + 2ab\sqrt{3} + b^2 + 3b^2 + a^2 + 4 - 2ab\sqrt{3} + 4b\sqrt{3} - 4a = 4a^2 + 4b^2 - 4a + 4b\sqrt{3} + 4$
- $12OQ^2 = (\sqrt{3}a - b - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}b + a + 1)^2 = 3a^2 + b^2 + 3 - 2ab\sqrt{3} - 6a + 2b\sqrt{3} + 3b^2 + a^2 + 1 + 2ab\sqrt{3} + 2b\sqrt{3} + 2a = 4a^2 + 4b^2 - 4a + 4b\sqrt{3} + 4$
- $12PQ^2 = (-2b-\sqrt{3})^2 + (2a-1)^2 = 4b^2 + 4b\sqrt{3} + 3 + 4a^2 - 4a + 1 = 4a^2 + 4b^2 - 4a + 4b\sqrt{3} + 4$

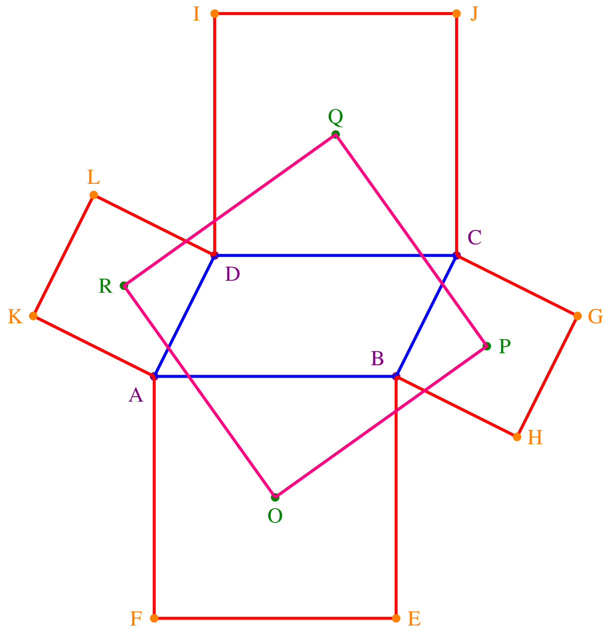
On trouve trois fois la même chose, le triangle OPQ est donc bien équilatéral. On connait même son côté en fonction de a et de b : en divisant par 12 puis en prenant la racine carrée, il vaut $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-a+b\sqrt{3}+1}{3}}$. On est très heureux de le savoir, mais cette méthode était quand même particulièrement immonde.

4. (a) Il y a plein de façons de trouver une relation entres ces trois affixes mais le plus rapide est de considérer que A est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ (inutile donc de faire intervenir le point D qui complète le triangle équilatéral, même si on peut aussi passer par là). On a donc (revoir le cours sur les isométries complexes si ça ne vous semble pas clair) : $a - o = j(b - o)$. Exactement pour les mêmes raisons, on aura $b - p = j(c - p)$ et $c - q = j(a - q)$.

   (b) Si on centre les relations précédentes sur les points O, P et Q, on peut les écrire sous la forme $o(1-j) = a - jb$; $p(1-j) = b - jc$ et $q(1-j) = c - ja$. On calcule alors facilement $(1-j)(o-p) = a - jb - b + jc = a - b(1+j) + jc$. Or, on sait bien que $1 + j + j^2 = 0$ (les nombres 1, j et j^2 étant les trois racines cubiques de l'unité dans le plan complexe, leur somme est nulle), donc $1 + j = -j^2$, et $(1-j)(o-p) = a + jc + j^2b$. Mais on peut de même calculer $(1-j)(q-p) = c - ja - b + jc = -ja - b - j^2c = -j(1-j)(o-p)$ (puisque $j^3 = 1$). Autrement dit, $q - p = -j(o-p) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(o-p)$. Cette dernière égalité prouve exactement que le point Q est l'image du point O par la rotation de centre P et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Autrement dit, le triangle OPQ est équilatéral indirect. Vous n'avez peut-être rien compris au calcul, mais n'empêche que ça va nettement plus vite qu'avec des calculs de coordonnées « classiques ».

5. Avec les complexes, on a directement $(1-j)(o+p+q) = a - jb + b - jc + c - ja = (1-j)(a+b+c)$, donc on déduit trivialement que $\dfrac{o+p+q}{3} = \dfrac{a+b+c}{3}$, ce qui prouve justement que les deux centres de gravité coïncident. Sinon, avec les coordonnées utilisées dans la question 3, le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+1}{3}, \dfrac{b}{3}\right)$, et celui du triangle OPQ a pour cooordonnées $\left(\dfrac{2\sqrt{3}a+2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{3}b}{6\sqrt{3}}\right)$, ce qui donne bien la même chose. Les plus motivés prouveront ce résultat par des méthodes purement géométriques.

6. Commençons donc par faire une jolie figure :



Et comme vous avez particulièrement adoré la méthode de la question 2 pour le coup des triangles, on va reprendre celle-là ! Sauf qu'en fait cette fois ça va aller beaucoup plus vite (même pas drôle). On peut toujours choisir le repère de façon à avoir $A(0,0)$ et $B(1,0)$. On note ensuite $D(a,b)$ et on aura $C(a+1,b)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. On calcule alors très facilement $E(1,-1)$ et $F(0,-1)$, donc $O\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Très facile également, $I(a,b+1)$ et $J(a+1,b+1)$, dont on déduit $Q\left(a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2}\right)$. Il y a un tout petit peu plus de travail pour les deux autres carrés. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et de même norme que lui. Comme $\overrightarrow{BC}=(a,b)$, on prend $\overrightarrow{BH}=(b,-a)$ (on doit avoir une abscisse positive pour que le point H soit extérieur au parallélogramme) donc $H(1+b,-a)$, puis $G(a+b+1,b-a)$, donc on déduit $P\left(\frac{a+b}{2}+1,\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)$. On procède de même pour le dernier carré : $\overrightarrow{AD}=(a,b)$, donc $\overrightarrow{AK}=(-b,a)$, ce qui donne $K(-b,a)$ et $L(a-b,a+b)$, puis $R\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2},\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$.

On peut passer aux calculs de distance :

- $OP^2=\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2$
$=\frac{a^2+b^2+1+2ab+2a+2b+b^2+a^2+1-2ab+2b-2a}{4}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+b+\frac{1}{2}$
- $PQ^2=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2$
$=\frac{a^2+b^2+1-2ab-2a+2b+a^2+b^2+1+2ab+2a+2b}{4}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+b+\frac{1}{2}$
- $QR^2=\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2+\left(\frac{b+1-a}{2}\right)^2=PQ^2$ (seul le signe de l'expression dans le premier carré a été changée)
- $RO^2=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2=PQ^2$

Notre quadrilatère $OPQR$ est donc manifestement un losange. Il ne reste plus qu'à prouver qu'un de ses angles est droit et ce sera un carré. Il suffit pour cela de calculer par exemple $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OR} = \dfrac{a+b+1}{2} \times \dfrac{a-b-1}{2} + \dfrac{b-a+1}{2} \times \dfrac{a+b+1}{2} = 0$ (on additionne deux nombres clairement opposés).