Exercice à travailler n°16

PTSI B Lycée Eiffel

8 juin 2020

Le théorème de Napoleon.

Parmi les très nombreux théorèmes liés à la géométrie du triangle figure celui-ci (dont l'attribution à Napoleon est assez obscure). Soit ABC un triangle quelconque, et D, E et F les trois points tels que les triangles ABD, BCE et CAF soit tous les trois équilatéraux et extérieurs au triangle ABC (ils ne doivent contenir aucun point de ABC ; le théorème marche aussi si les trois triangles équilatéraux sont tous les trois intérieurs au triangle). En notant alors O, P et Q les centres respectifs des triangles ABD, BCE et CAF, le triangle OPQ est un triangle équilatéral. Les questions de l'exercice sont essentiellement indépendantes puisqu'on va démontrer ce théorème par plusieurs méthodes différentes.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les triangles OCP et ABE sont des triangles semblables de rapport $\sqrt{3}$. En déduire que $AE = \sqrt{3} \times OP$. Démontrer de même que $AE = \sqrt{3} \times PQ$. En déduire que OPQ est isocèle puis terminer la démonstration du théorème.
3. On considère le repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel le point A est pris pour origine du repère et pour lequel $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ (si AB n'est pas égale à 1, ça n'a pas d'importance, on effectue sur toute la figure une homothétie centrée en A de rapport idoine pour que ça fonctionne). On notera alors (a, b) les coordonnées du point C.
   (a) Donner des équations cartésiennes des droites (AC) et (BC) (en fonction de a et b, bien entendu).
   (b) Préciser les coordonnées des milieux I, J et K des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
   (c) Expliquer pourquoi on a $IO = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} AB$, et en déduire les coordonnées du point O. Calculer de même les coordonnées de P et de Q.
   (d) Conclure par un calcul de distances bourrin.
4. On notera pour cette dernière démonstration $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (mais oui, on va utiliser les complexes !). On note a, b, c, o, p et q les affixes complexes respectives des points A, B, C, O, P et Q.
   (a) Quelle relation a-t-on entre a, b et o ? Donner de même des relations entre a, c et q, et entre b, c et p.
   (b) Calculer $(1 - j)(o - p)$ et l'exprimer en fonction de $q - p$. Conclure.
5. Complément : montrer que le triangle (équilatéral) OPQ a le même centre de gravité que le triangle ABC (à placer sur la figure). On pourra réutiliser certains résultats des questions précédentes.
6. Généralisation : soit $ABCD$ un parallélogramme quelconque dans le plan. On définit les points E, F, G, H, I, J, K et L tels que les quadrilatères $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$ et $DAKL$ soient quatre carrés extérieurs au parallélogramme $ABCD$. Montrer que les centres O, P, Q et R de ces quatre carrés forment eux-même un carré.