Exercice à travailler n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 avril 2020

Un nouvel exercice de révisions d'algèbre linéaire.

1. Il faut revenir à la définition et vérifier les trois propriétés suivantes :

   - $0 \in B$: c'est évident, la suite nulle est bien entendu bornée.
   - B est stable par somme. En effet, si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées, il existe quatre réels m_1, m_2, M_1 et M_2 tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1$ et $m_2 \leqslant v_n \leqslant M_2$. Mais alors il suffit d'additionner ces deux encadrements pour en déduire que $m_1 + m_2 \leqslant u_n + v_n \leqslant M_1 + M_2$, la suite $(u_n + v_n)$ est donc bien bornée.
   - B est stable par produit par un réel : avec des notations similaires à la vérification précédente, si $m \leqslant u_n \leqslant M$, la suite (λu_n) sera simplement bornée par λm et λM (avec un renversement du sens des inégalités si $\lambda < 0$).

   Notre sous-ensemble B est donc bien un sous-espace vectoriel de E, ce qui n'est par contre pas du tout le cas de C, qui n'est pas du tout stable par somme ni par produit par un réel. Par exemple, la suite géométrique définie par $u_n = (-1)^n$ appartient à C, mais $2u_n$ n'y est plus.

2. Puisqu'on nous y autorise, on va simplement déterminer les suites appartenant à F en résolvant l'équation caractéristique associée à la récurrence linéaire d'ordre 2 définissant F. Cette équation $2x^2 - 9x + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 81 - 32 = 49$ et admet deux racines réelles $r_1 = \frac{9+7}{4} = 4$ et $r_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$. On peut donc affirmer que les suites appartenant à F sont toutes les suites de la forme $u_n = A \times 4^n + B \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ce qui revient exactement à dire que $F = \mathrm{Vect}\left((4^n), \left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$. En particulier, F est bien en sou-espace vectoriel de E de dimension 2 (les suites géométriques de raison 4 et $\frac{1}{2}$ n'étant pas proportionnelles).

3. Supposons donc que $(u_n) \in F \cap B$. On doit donc avoir $u_n = A \times 4^n + \frac{B}{2^n}$, et en même temps la suite doit être bornée. Cela impose que $A = 0$ (sinon la suite admet une limite infinie et ne peut être bornée). Réciproquement, si $A = 0$, la suite $\left(\frac{B}{2^n}\right)$ est bornée. On en déduit que $F \cap B = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$, en particulier il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 1.

4. Si on veut vraiment prouver que H est un sous-espace vectoriel de E, on peut le faire très rapidement : on note $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(u_n) = u_0$. Cette application est une forme linéaire (la linéarité est évidente ici) dont H est tout simplement le noyau (et un noyau d'application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire, ça c'est dans le cours). Attention, on ne peut par contre rien en déduire sur la dimension de H puisqu'ici tout est de dimension infinie. Pour prouver la supplémentarité de G et de H, on va donc revenir à la définition :

- une suite (u_n) appartenant à la fois à G et à H doit être de la forme $u_n = \frac{B}{2^n}$ et en même temps vérifier $u_0 = 0$. Cela impose $B = 0$, donc u_n est alors la suite nulle, et $G \cap H = \{0\}$.
- essayons maintenant de prouver que $E = G + H$. Soit donc une suite (u_n) appartenant à E, on veut écrire u_n sous la forme $u_n = g_n + h_n$, avec $g_n \in G$, donc $g_n = \frac{B}{2^n}$, et $h_n \in H$, donc $h_0 = 0$. Pour $n = 0$, cela impose donc $u_0 = B$, donc $g_n = \frac{u_0}{2^n}$, et par conséquent $h_n = u_n - \frac{u_0}{2^n}$, qui par construction appartient bien à H. On a donc prouvé que $E = G + H$.

Nos deux sous-espaces G et H sont donc bien supplémentaires dans E.

5. Pour n'importe quelle suite (u_n), en notant p la projection sur H parallèlement à G, on aura $p(u_n) = h_n$. Pour la suite (v_n) constante égale à 3, on a donc $p(v_n) = 3 - \frac{3}{2^n}$. De même, la projection s sur G parallèlement à H est définie par $s(u_n) = g_n - h_n = \frac{u_0}{2^{n-1}} - u_n$, donc $s(v_n) = \frac{3}{2^{n-1}} - 3$.