

Exercice à travailler n°2

PTSI B Lycée Eiffel

8 avril 2020

Un nouvel exercice de révisions d'algèbre linéaire.

On se place dans l'espace vectoriel E constitué de toutes les suites réelles. On note B le sous-ensemble de E constitué des suites réelles bornées.

1. Montrer rigoureusement que B est un sous-espace vectoriel de E .

En notant C l'ensemble des suites bornées par -1 et 1 (autrement dit, $C = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1\}$, l'ensemble C serait-il aussi un sous-espace vectoriel de E ?

2. On note F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation de récurrence $2u_{n+2} = 9u_{n+1} - 4u_n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, et en donner une base (on a tout à fait le droit d'utiliser ici toutes nos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap B$. On notera G cette intersection.
4. On note enfin $H = \{(u_n) \in E \mid u_0 = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel supplémentaire de G dans E .
5. On note (v_n) la suite constante égale à 3. Calculer la projection de (v_n) sur H parallèlement à G , ainsi que sa symétrie par rapport à G parallèlement à H .