Exercice à travailler n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 mai 2020

Un peu de révisions sur les calculs de sommes.

1. On factorise facilement le dénominateur de notre fraction : $n^3-4n = n(n^2-4) = n(n-2)(n+2)$. On devrait donc pouvoir obtenir une égalité de la forme $\dfrac{2n-1}{n^3-4n} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-2} + \dfrac{c}{n+2}$, où a, b et c sont trois constantes réelles. On peut bien sûr, pour calculer ces constantes, utiliser les petites astuces vues dans le chapitre sur le calcul intégral en début d'année. Ici, en multipliant notre égalité par n, on obtiendra $\dfrac{2n-1}{n^2-4} = a + \dfrac{bn}{n-2} + \dfrac{cn}{n+2}$, ce qui en posant $n=0$ impose $a = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$. De même, en multipliant par $n-2$, puis en posant $n=2$, on trouve $b = \dfrac{2\times 2-1}{2\times(2+2)} = \dfrac{3}{8}$; et en multipliant par $n+2$ puis en posant $n=-2$, la dernière constante $c = \dfrac{2\times(-2)-1}{(-2)\times(-2-2)} = -\dfrac{5}{8}$. Autrement dit, on a $\dfrac{2n-1}{n^3-4n} = \dfrac{1}{4n} + \dfrac{3}{8(n-2)} - \dfrac{5}{8(n+2)}$.
2. Un télescopage va se produire entre les trois sommes une fois qu'on aura appliqué la décomposition obtenue à la question précédente. Plus précisément (avec une rédaction du type « décalage d'indices », où il faudra bien sûr décaler de deux unités les deux dernières sommes) : $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{3}{8(k-2)} - \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{8(k+2)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{8k}$. Les termes compris entre les indices 5 et $n-2$ (indices communs aux trois sommes) vont se simplifier puisque $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{8} = 0$. Il restera donc les autres termes, soit $S_n = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4(n-1)} + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{24} + \dfrac{3}{32} - \dfrac{5}{8(n-1)} - \dfrac{5}{8n} - \dfrac{5}{8(n+1)} - \dfrac{5}{8(n+2)} = \dfrac{8+6+36+18+12+9}{96} - \dfrac{3}{n-1} - \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{8(n+1)} - \dfrac{5}{8(n+2)} = \dfrac{89}{96} -$. Inutile de mettres les derniers termes au même dénominateur, ça n'a aucun intérêt.
3. Il suffit de constater que tous les termes dépendant de n dans la formule précédente ont une limite nulle pour en déduire que (S_n) converge, et que $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{89}{96}$.

Pour le petit complément, on peut prouver la convergence facilement : la série est à termes positifs, et $\dfrac{n^2-n+2}{(n+2)!} \sim \dfrac{n^2}{(n+2)!} < \dfrac{1}{n!}$, qui est lui-même le terme général d'une série exponentielle convergente. Notre série converge donc. Le calcul explicite nécessite de se ramener à des séries exponentielles, et pour cela de trafiquer un peu l'expression sous la somme. Commençons par écrire que $n^2-n+2 = n^2+3n+2-4n = (n+1)(n+2)-4n$.

On peut alors calculer (on travaillera directement avec des sommes infinies dans la mesure où on ne manipule que des séries majorées par des séries exponentielles convergentes) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2-k+2}{(k+2)!} =$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{(k+2)!} - \frac{4k}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4k+8}{(k+2)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{(k+2)!} = e - 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} + 8\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)!} = e - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 8\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 4(e-1) + 8(e-2) = 5e - 12$ (les séries obtenues dans les dernières sommes sont des séries exponentielles « incomplètes », il faut leur soustraire les termes manquants pour obtenir leur somme).