Exercice à travailler n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 avril 2020

Petit problème de révisions d'algèbre linéaire.

1. Il suffit bien sûr d'écrire chaque ensemble « sous forme de Vect » pour prouver qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ce n'est d'ailleurs pas bien difficile : $F = \{(x,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,0,0);(0,1,1))$. La famille $((1,0,0);(0,1,1))$ est manifestement libre, et constitue donc une base de F (qui est donc de dimension 2). Le système de deux équations définissant G se résout immédiatement : $x = y$ et $z = 2y$, donc $G = \{(y,y,2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,2))$. L'unique vecteur $(1,1,2)$ constitue bien sûr une base de G, qui est donc un espace de dimension 1.
2. La question précédente permet d'affirmer que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. De plus $(1,1,2) \notin F$ (il ne vérifie pas l'équation $y = z$), ce qui suffit à assurer que $F \cap G = \{0\}$. Les deux sous-espaces F et G sont donc bien supplémentaires.
3. Soit $u(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, on peut l'écrire de façon unique sous la forme $u = a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2)$ puisque F et G sont supplémentaires. Les réels a, b et c vérifient le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & + & c & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ & & b & + & 2c & = & z \end{array}\right.$. En soustrayant les deux dernières équations, on trouve $c = z - y$. On en déduit via la deuxième équation que $b = y - c = 2y - z$, puis en exploitant la première équation que $a = x - c = x + y - z$. En notant $u_G = c(1,1,2) = (z-y, z-y, 2z-2y) \in G$ (par construction) et $u_F = a(1,0,0) + b(0,1,1) = (x+y-z, 2y-z, 2y-z) \in F$, on a par définition de la projection sur F parallèlement à G : $p(x,y,z) = (x+y-z, 2y-z, 2y-z)$.
4. (a) En posant $X = x+y-z$, $Y = Z = y$, on calcule $q^2(x,y,z) = q(X,Y,Z) = (X+Y-Z, Y, Y) = (x+y-z, y, y) = q(x,y,z)$. On a donc $q \circ q = q$, et q est un projecteur (la linéarité de q étant facile et sa preuve sans intérêt).
   (b) Le noyau de q est constitué des vecteurs $u(x,y,z)$ vérifiant $q(u) = 0$, soit $x+y-z = y = 0$, donc $y = 0$ et $z = x$. Autrement dit $\ker(q) = \text{Vect}((1,0,1))$. Pour calculer l'image de q, on peut rechercher les vecteurs invariants par notre projecteur, et donc résoudre l'équation $q(x,y,z) = (x,y,z)$. La deuxième équation peut immédiatement être éliminée ($y = y$ est toujours vérifié), la troisième donne alors $z = y$, puis la première $y - z = 0$, donc à nouveau $z = y$. On conclut : $\text{Im}(q) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\} = F$.
   (c) Inutile de faire des calculs, la question précédente prouve que, $\forall u \in \mathbb{R}^3$, on a $q(u) \in F$. Or, tout vecteur de F est invariant par p puisque F est l'espace sur lequel projette le projecteur p. On a donc toujours $p \circ q(u) = q(u)$, donc $p \circ q = q$. C'est exactement le même raisonnement en sens inverse puisque p et q sont deux projecteurs ayant la même image : $q \circ p = p$.
5. Calculons donc (sans revenir aux coordonnées, ça ne sert à rien) $r^2 = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2$ (attention à ne pas mettre un « double produit » $2p \circ q$ qui serait faux ici). Puisque p et q sont deux projecteurs, on sait que $p^2 = p$ et $q^2 = q$, et les résultats de la question 4.c permettent alors de conclure que $r^2 = p + q + p + q = 2(p+q) = 2r$. L'application r n'est

donc pas un projecteur (pour les curieux, on peut prouver à partir de l'égalité $r^2 = 2r$ que r est en fait la composée d'une projection par une homothétie de rapport 2).

6. Une fois constaté que $r^2 = 2r$, on peut conjecturer (en imaginant une espèce de « suite géométrique » d'applications) que $r^n = 2^{n-1}r$. C'est bien le cas, et ça se prouve simplement par récurrence. On peut commencer la récurrence au rang $n = 1$: $r^1 = r = 2^0 r$. On suppose ensuite que $r^n = 2^{n-1}r$ et on compose simplement (à droite) par r pour obtenir $r^{n+1} = 2^{n-1}r \circ r = 2^{n-1} \times 2r = 2^n r$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence.

7. Il existe en fait un petit théorème bien pratique pour gérer facilement ce genre de question : si deux application linéaires f et g vérifient $f \circ g = 0$, alors $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$. C'est d'ailleurs assez facile à démontrer : supposons sous ces hypothèses que $u \in \mathrm{Im}(g)$, alors par définition $u = g(v)$ pour un certain vecteur v appartenant à l'espace de départ de l'application g. Mais on a donc $f(u) = f(g(v)) = 0$ puisque $f \circ g$ est l'application nulle. Autrement dit, $u \in \ker(f)$ et on a bien $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.

   Ici, on sait que $r^2 = 2r$, donc $r^2 - 2r = 0$, ce qu'on peut écrire $r \circ (r - 2\,id) = 0$ ou $(r - 2\,id) \circ r = 0$. Les inclusions demandées découlent alors immédiatement de la remarque précédente.

8. (a) La première partie de la question est assez débile : $id = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}(r - 2\,id)$. Supposons alors $u \in \mathbb{R}^{\not\Vdash}$ (le $\mathbb{R}^2$ de l'énoncé était une coquille manifeste), on peut donc écrire $u = \frac{1}{2}r(u) - \frac{1}{2}(r(u) - 2u)$. En posant $v = \frac{1}{2}r(u)$ et $w = -\frac{1}{2}(r(u) - 2u)$, on a alors $v \in \mathrm{Im}(r)$ (puisque $v = r\left(\frac{u}{2}\right)$) et $w \in \mathrm{Im}(r - 2\,id)$ (même principe, le facteur $-\frac{1}{2}$ ne change rien), donc $u \in \mathrm{Im}(r) + \mathrm{Im}(r - 2\,id)$, et cette somme est donc bien égale à $\mathbb{R}^3$ tout entier.

   (b) En exploitant les questions précédentes, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(r) + \mathrm{Im}(r - 2\,id) \subset \ker(r) + \ker(r - 2\,id)$, donc on a forcément $\ker(r) + \ker(r - 2\,id) = \mathbb{R}^3$ (ça ne peut pas être plus gros !). Or, nos deux noyaux ont une intersection très clairement réduite à 0 puisqu'un même vecteur v non nul ne peut à la fois appartenir à $\ker(r)$ et à $\ker(r - 2\,id)$ sinon il vérifierait simultanément $r(u) = 0$ et $r(u) = 2u$. Ces deux conditions suffisent à assurer que nos deux noyaux sont supplémnetaires.

   (c) On connait en fait déjà la décomposition d'un vecteur u dans la somme directe précédente : $u = \frac{1}{2}r(u) - \frac{1}{2}(r(u) - 2u)$, avec $\frac{1}{2}r(u) \in \mathrm{Im}(r)$, donc $\frac{1}{2}r(u) \in \ker(r - 2\,id)$ d'après la question 7, et $-\frac{1}{2}(r(u) - 2u) \in \mathrm{Im}(r - 2\,id)$ donc $-\frac{1}{2}(r(u) - 2u) \in \ker(r)$ (toujours d'après la question 7). Autrement dit, la projection h est définie par $h(u) = -\frac{1}{2}(r(u) - 2u) = u - \frac{1}{2}(p(u) + q(u))$, soit $h(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{1}{2}((x + y - z, 2y - z, 2y - z) + (x + y - z, y, y))$, donc $h(x, y, z) = \left(z - y, \frac{z - y}{2}, \frac{3z - 3y}{2}\right)$.