Exercice à travailler n°1

PTSI B Lycée Eiffel

6 avril 2020

Petit problème de révisions d'algèbre linéaire.

Dans cet exercice, on note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z - 2y = 0\}$.

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de chacun.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. On note p la projection sur F parallèlement à G, donner l'expression explicite de $p(x, y, z)$.
4. On définit une application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $q(x, y, z) = (x + y - z, y, y)$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de q, et vérifier que $\mathrm{Im}(q) = F$.
   (c) Déterminer ce que valent $p \circ q$ et $q \circ p$ sans faire de calcul avec les coordonnées.
5. On note $r = p + q$. L'application r est-elle un projecteur ?
6. Calculer r^n pour tout entier naturel n (on note comme d'habitude $r^n = r \circ r \cdots \circ r$).
7. Montrer que $\mathrm{Im}(r - 2\,id) \subset \ker(r)$ et que $\mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2\,id)$.
8. (a) Écrire id comme combinaison linéaire de r et de $r - 2\,id$, et en déduire que $\mathrm{Im}(r - 2\,id) + \mathrm{Im}(r) = \mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que $\ker(r)$ et $\ker(r - 2\,id)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) Donner l'expression de la projection h sur $\ker(r)$ parallèlement à $\ker(r - 2\,id)$.