Exercice à travailler n°15 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 juin 2020

Un exercice inspiré de la vie réelle.

1. Chaque soft a une chance sur quatre d'être intégré à la boisson, et on répète l'expérience « est-ce que je mets aussi de ça dedans ? » six fois de suite. Le nombre de softs va donc simplement suivre une loi binomiale de paramètre $\left(6, \dfrac{1}{4}\right)$, d'espérance $E(X) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et de variance $V(X) = 6 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8}$. De même, la variable Y suivra une loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ (puisque cette fois chaque hard sera choisi avec une chance sur deux), donc $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 1$.
2. Si on cherche par exemple à calculer la probrabilité davoir trois softs et deux hards dans le breuvage, on va calculer $P((X = 3) \cap (Y = 2)) = \dbinom{6}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \dbinom{4}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, ce qui vaut accessoirement $\dfrac{60}{2^{16}} = \dfrac{15}{16\ 384}$. On a de fait simplement multiplié les probabilités des évènements $X = 3$ et $Y = 2$, et c'est ce qu'on fera à chaque fois. Les deux variables sont bien indépendantes, ce qui est complètement normal puisque les lancers de pièce sont tous indépendants. Il suffit donc de connaitre les deux lois pour dresser le tableau de la loi conjointe. La loi de Y est donnée par :

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Et celle de X :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{729}{4\ 096}$	$\frac{1\ 458}{4\ 096}$	$\frac{1\ 215}{4\ 096}$	$\frac{540}{4\ 096}$	$\frac{135}{4\ 096}$	$\frac{18}{4\ 096}$	$\frac{1}{4\ 096}$

Pour le tableau de la loi conjointe, on se contentera d'indiquer les numérateurs de chaque fraction, le dénominateur étant toujours égal à 2^{16} (on ne simplifiera aucune fraction) :

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5	6
0	729	1 458	1 215	540	135	18	1
1	2 916	5 832	4 860	2 160	540	72	4
2	4 374	8 748	7 290	3 240	810	108	6
3	2 916	5 832	4 860	2 160	540	72	4
4	729	1 458	1 215	540	135	18	1

3. On peut exploiter le tableau précédent (il faut bien qu'il serve à quelques chose !) pour cette question. Par exemple, on obtiendra $P(Z = 3)$ en additionnant les probabilités des cases du tableau contenant des valeurs de X et de Y dont la somme est égale à 3, autrement dit des cases « $X = 0$ et $Y = 3$ », « $X = 1$ et $Y = 2$ », « $X = 2$ et $Y = 1$ », et « $X = 3$ et $Y = 0$ ». En fait on obtiendra toutes les probabilités des différentes valeurs possibles de Z en faisant des

additions « par diagonale » dans le tableau de la loi conjointe. Finalement on trouve (toujours en ne gardant que les numérateurs, le dénominateur n'ayant pas changé) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Z=k)$	729	4 374	11 421	17 064	16 146	10 116	4 258	1 192	213	22	1

On ne reconnait pas franchement de loi usuelle dans cette horreur, mais comment fait-on pour prouver que ça n'en est pas (par le plus grand des hasards) une qu'on aurait étudiée en cours ? Bon, déjà ce n'est pas uniforme, donc la seule possibilité serait une loi binomiale. Mais si Z suit loi binomiale de paramètre (n,p), on doit avoir $np = E(Z) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2}$ par linéarité de l'espérance. Par ailleurs, Z prenant des valeurs entre 0 et 10, on aurait forcément $n = 10$ et donc $p = \frac{7}{20}$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier si la loi $\mathcal{B}\left(10, \frac{7}{20}\right)$ a la même loi que Z, et ce n'est pas du tout le cas (un seul calcul suffira, toutes les probabilités sont différentes).

4. Il faut bien évidemment distinguer deux cas :
   - au premier verre, la probabilité est suffisamment négligeable pour qu'on puisse l'arrondir à 0.
   - mais abrès lee touzième vert, hips, za ce disgute un beu blus.