Exercice à travailler n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 mai 2020

Un exercice bilan très classique.

1. (a) L'étudiant aura tout juste avec une probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$.
Pour au moins une réponse juste, il est plus simple de passer par le complémentaire. La probabilité que l'étudiant ait tout faux est de $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, donc il aura au moins une réponse juste avec une probabilité $1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$.

(b) On reconnait ici un exemple caractéristique de loi de Bernoulli. ON répète cinq fois une expérience ayant une probabilité $\frac{1}{3}$ de réussir (la réussite étant ici une bonne réponse à une des questions du QCM) et on compte le nombre de succès. On aura donc $X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$, et $\forall k \in \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$. En appliquant les formules du cours, $E(X) = \frac{5}{3}$ et $V(X) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$. On peut également donner la loi complète de X sous forme de tableau :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

(c) Puisque chaque bonne réponse rapporte 2 points et que chaque erreur coute un point, on peut écrire $Y = 2X - (5 - X) = 3X - 5$ (on a en effet par définition X bonnes réponses, et donc $5 - X$ mauvaises réponses). Les propriétés du cours (linéarité de l'espérance notamment) permettent alors de calculer directement $E(Y) = 3E(X) - 5 = 0$ et $V(Y) = 9V(Y) = 10$.

(d) S'il choisit de ne répondre qu'à une seule question, le candidat aura une probabilité $\frac{1}{3}$ d'avoir une note positive (il faut qu'il choisisse la bonne réponse). S'il répond à deux questions, il lui suffit d'avoir (au moins) une réponse juste sur deux, ce qui se produira avec probabilité $\frac{5}{9}$ (il a une probabilité $\frac{4}{9}$ de se tromper deux fois), ce qui est nettement supérieur à $\frac{1}{3}$. Enfin, s'il répond à toutes les questions, il doit donner au moins deux bonnes réponses pour atteindre une note strictement positive (deux bonnes réponses donnent une note de 1, une bonne réponse une note de -2) donc, en exploitant les calculs précédents, il atteindra son objectif avec une probabilité $1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{131}{243}$. Il ne reste plus qu'à comparer cette valeur aux précédentes : $\frac{5}{9} = \frac{135}{243}$, donc l'étudiant à intérêt à se contenter de répondre à deux questions.

2. (a) Le nombre total de QCM possibles est de $\binom{20}{5} = 15\ 504$ (l'ordre des question n'a pas d'importance ici, autant travailler avec des combinaisons). Parmi ceux-ci, il y en a $\binom{12}{5} = 792$ constitués de questions révisées par l'étudiant, soit une probabilité de $\frac{33}{646} \simeq 0.05$. Les simplifications ont bien sûr été faites ici à l'aide d'une calculatrice.
Pour au moins une question révisée par l'étudiant, on va à nouveau passer par le complémentaire. Le nombre de QCM ne contenant aucune question révisée est de $\binom{8}{5} = 56$, ce qui laisse une probabilité de $\frac{15\ 448}{15\ 504} = \frac{301}{323} \simeq 0.93$ d'avoir au moins une question révisée dans le QCM.

(b) La variable Z prend les mêmes valeurs que la variables X étudiée plus haut : $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On a déjà calculé $P(Z = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}}$, et $P(Z = 0) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}}$. Plus généralement, on peut en fait donner une formule assez simple : $P(Z = k) = \frac{\binom{12}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{20}{5}}$. Il faut en effet choisir k questions parmi les question révisées par l'étudiant, puis $5 - k$ questions parmi les 8 questions qu'il n'a pas révisées pour compléter le QCM. Si on détaille et simplifie les probabilité, on a la loi complète suivante :

k	0	1	2	3	4	5
$P(Z = k)$	$\frac{7}{1\ 938}$	$\frac{35}{646}$	$\frac{77}{323}$	$\frac{385}{969}$	$\frac{165}{646}$	$\frac{33}{646}$

On calcule brillamment l'espérance à partir de la loi donnée juste au-dessus (il ne s'agit évidemment pas d'une loi usuelle) en mettant tout au même dénominateur : $E(X) = \frac{105 + 2 \times 462 + 3 \times 770 + 4 \times 495 + 5 \times 99}{1\ 938} = \frac{5\ 814}{1\ 938} = 3$. En fait, le résultat n'est pas surprenant, le candidat a révisé $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ des questions, il tombera en moyenne sur trois questions révisées sur les cinq questions qui constituent le QCM.

(c) Si on ne veut pas s'embêter avec un raisonnement rigoureux, on se contente de dire que, sur les cinq questions du QCM, il y en aura en moyenne 3 qu'il aura révisées et qui lui rapporteront donc 6 points, et deux qu'il n'aura pas révisées, qui lui rapporteront en moyenne 0 point (c'est le même calcul que celui qu'on a effectué plus haut à partir du questionnaire complet, les réponses aléatoires ont une espérance de points nulle). Globalement, notre candidat va donc marquer 6 points en moyenne. Si on veut être rigoureux, on constate que le candidat répond au hasard à $5 - Z$ questions, et on prouve que, quelle que soit la valeur de $5 - Z$, l'espérance de points marqués sur ces questions sera nulle (il suffit en fait de le faire sur une question et d'utiliser la linéarité de l'espérance). On conclut comme précédemment.