Exercice à travailler n°14 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 juin 2020

Un exercice inspiré de la vie animale.

1. L'énoncé est clair : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour Y, il ne faut pas oublier d'ajouter la valeur 0 puisqu'il est tout à fait possible que tous les bébés gnous de la portée se fassent bouffer, donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Si on sait que $X = 3$, la variable Y va en fait simplement suivre une loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ (on répète sur chacun des trois gnous l'expérience consistant à les laisser gambader dans la savane, avec une probabilité $\frac{1}{3}$ de succès, c'est-à-dire qu'ils ne se fassent pas bouffer, et on compte le nombre de succès). Autrement dit, on aura $P_{X=3}(Y = 0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $P_{X=3}(Y = 1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$; $P_{X=3}(Y = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ et $P_{X=3}(Y = 3) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. Ce qu'on peut résumer dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P_{X=3}(Y = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

3. Les probabilités calculées à la question précédente nous donnent déjà une colonne de notre tableau de loi conjointe, à un petit détail près : ce sont des probabilités conditionnelles et non des probabilités d'intersection, il faut donc les multiplier par $\frac{2}{5}$ (la valeur de $P(X = 3)$) pour obtenir $P((X = 3) \cap (Y = j))$. On remplit de même les autres colonnes : la première colonne contient simplement les probabilités $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ multipliées par $\frac{1}{10}$; la deuxième colonne contient les probabilités d'une loi binomiale de paramètre $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, c'est-à-dire $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ et $\frac{1}{9}$, multipliées par $\frac{1}{5}$, et dans la dernière colonne on multiplie par $\frac{3}{10}$ les probabilités correspondant à une loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{3}\right)$. Je ne détaille pas tous les calculs, mais par exemple $P((X = 4) \cap (Y = 1)) = \frac{3}{10} \times \binom{4}{1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{135}$. On obtient finalement péniblement le tableau suivant :

$Y\backslash X$	1	2	3	4
0	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{16}{135}$	$\frac{8}{135}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{16}{135}$
2	0	$\frac{1}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{4}{45}$
3	0	0	$\frac{2}{135}$	$\frac{4}{135}$
4	0	0	0	$\frac{1}{270}$

4. Pour la loi de Y, on se contente d'additionner les termes du tableau précédent ligne par ligne. Par exemple, $P(Y=1) = \frac{1}{30} + \frac{4}{45} + \frac{8}{45} + \frac{16}{135} = \frac{9+24+48+32}{270} = \frac{113}{270}$. Celle-ci ne se simplifie pas du tout, mais curieusement on a quelques valeurs très simples dans la tableau de la loi de Y :

k	0	1	2	3	4
$P(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{113}{270}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{270}$

On calcule bien sûr nos espérance et variance à la main, puisqu'il ne s'agit certainement pas d'une loi usuelle. On calcule donc $E(Y) = \frac{113}{270} + \frac{2}{5} + \frac{6}{45} + \frac{4}{270} = \frac{113+108+36+4}{270} = \frac{261}{270} = \frac{29}{30}$. On a donc en moyenne un peu moins d'un gnou survivant par portée, mais surtout on constante (si on prend le temps de calculer l'espérance de X) que $E(Y) = \frac{1}{3}E(X)$, ce qui est intuitivement normal, puisque chaque gnou de la portée a une chance sur trois de survivre. Pour la variance, on va bien sûr utiliser la formule de König-Huygens : $E(X^2) = \frac{113}{270} + \frac{4}{5} + \frac{18}{45} + \frac{16}{270} = \frac{113+216+108+16}{270} = \frac{453}{270} = \frac{151}{90}$. On a donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{151}{90} - \frac{841}{900} = \frac{669}{900} = \frac{223}{300}$. Comme d'habitude, voila un résultat particulièrement passionnant.

5. Non, elles ne le sont pas du tout, puisque par exemple $P((X=2) \cap (Y=3)) = 0$ alors que ni $P(X=2)$ ni $P(Y=3)$ ne sont nulles. C'est bien sûr normal, le nombre de gnous qui survivent étant directement lié au nombre de gnous de la portée.