Chapitre 15 : Analyse asymptotique

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2018

La mathématique est une science dangereuse :
elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau
de l'homme car il n'a que ça à faire.

Perles du bac.

1 Négligeabilité, équivalence

2 Développements limités

2.1 Théorie

2.2 Formulaire, première partie

2.3 Opérations sur les développements limités

2.4 Formulaire, deuxième partie

3 Applications des calculs de développements limités.

Jusqu'ici, les développements limités n'ont été vus dans ce chapitre que comme une occasion de vous faire aligner des calculs relativement barbares, dans le but finalement obscur d'approcher une fonction donnée par un polynôme au voisinage d'un point donné. Pourquoi pas, mais en pratique, ça sert à quoi ? Pour terminer ce chapitre, nous allons détailler quelques exemples de calculs rendus beaucoup plus simples (voire même tout simplement possibles) par l'utilisation des développements limités. Aucun théorème à apprendre dans cette section du cours, on va se contenter d'exemples, mais les méthodes vues dans les deux derniers paragraphes doivent absolument être maitrisées et font donc vraiment partie intégrante du cours sur les développements limités.

3.1 Calculs de limites

Première application toute bête, le calcul de limites trop compliquées à obtenir par des méthodes classiques. Théoriquement, les développements limités permettent de calculer n'importe quelle limite puisqu'ils permettent de « transformer » n'importe quelle fonction en polynôme, et qu'on sait très bien calculer des limites de polynômes (et de produit, quotient ou composées de polynômes) à n'importe quel endroit. En pratique, c'est un peu plus compliqué. Déjà on ne peut pas calculer des développements limités de n'importe quelle fonction à n'importe quel endroit. Par exemple, une limite classique comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$ ne pourra jamais être obtenue par ce genre de méthode (de façon générale, tous les résultats de croissance comparée resteront indispensables). Par ailleurs, on ne sait bien calculer nos développements limités qu'en 0. Si on a une variable (pour une suite ou une fonction) qui tend vers autre chose que 0, il faudra donc commencer par effectuer un changement de variable pour se ramener à un paramètre qui tend vers 0. Cette variable ne sera du coup plus toujours un réel x, ce qui nous fera en fait régulièrement sortir du cadre des stricts développements limités pour faire ce qu'on appellera plutôt des développements asymptotiques. Un développement asymptotique, c'est en gros l'écriture d'une expression mathématique sous la forme d'une somme de termes « de plus en plus petits » (autrement dit, chaque terme de la somme est négligeable par rapport à celui qui le précède) et conclue par un o, mais sans nécessairement que ces termes soient simplement des puissances de la variable (ce qui donne du coup pour l'expression, au o près, une forme polynômiale). Ainsi, $1 + x - 3x^2 + o(x^2)$ est un développement limité quand x tend vers 0, mais on pourra dire qu'une expression du type $n+1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ est un développement asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$. On parlera plus précisément pour cet exemple de développement asymptotique à trois termes (il y a trois ordres de grandeur différentes avant le o), ou de développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ (ici l'ordre est simplement ce qu'on met dans le o).

Une dernière remarque avant de commencer les exemples concrets : pour calculer une limite, on a théoriquement besoin que d'un équivalent de notre suite ou de notre fonction (dans le cas où la limite est finie non nulle, avoir la limite ou avoir un équivalent donne rigoureusement la même information ; dans le cas où la limite est nulle ou infinie, un équivalent est même plus précis que la simple connaissance de la limite). Autrement dit, seul le premier terme de notre développement limité ou asymptotique sera nécessaire pour le calcul de limites. Toutefois, il sera fréquemment indispensable d'utiliser des développements limités pour les calculs intermédiaires et même de les pousser à un ordre un peu plus élevé que ce à quoi on pourrait s'attendre. Pas de mystère pour choisir l'ordre auquel on va initialement effectuer les calculs : soit on a assez d'expérience pour anticiper ce qui va se passer et choisir en conséquence, soit non (ce qui devrait être votre cas au début) et on fait systématiques des développements limités à l'ordre 2 ou 3 « au cas où » quitte à calculer pour rien.

Un premier exemple simple.

On veut calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Ce genre de calcul de limite intervient naturellement quand on prolonge des fonctions faisant intervenir du ln par continuité, et qu'on cherche à savoir si la fonction prolongée est dérivable (on verra un peu plus loin que, dans ce genre de cas, on peut effectuer tous les calculs d'un seul coup). Sans utilisation de développement limité, on a une forme indéterminée dont on ne peut pas se dépêtrer. Avec les DL, ça devient presque trop facile, on effectue un DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en anticipant le fait que le x va se simplifier au numérateur, et on écrit tout simplement $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$ (quand on simplifie par x^2, il faut bien faire attention à diviser également par x^2 ce qui se trouve dans le o). Ce qu'on vient d'obtenir revient exactement à dire que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ (rappelons en passant que $o(1)$ signifie simplement « tend vers 0 »).

Un deuxième exemple beaucoup moins simple.

On souhaite calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

On ne se préocuppera pas du tout du domaine de définition de la fonction f ici, on admet qu'elle est bien définie au voisinage de $+\infty$. Le premier réflexe doit être d'écrire la fonction sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x^2 \ln(x \sin(\frac{1}{x}))}$. Il faut bien faire attention ici au fait que notre variable x tend vers $+\infty$, il est donc hors de question d'écrire des développements limités faisant intervenir cette variable x. Par contre, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et on peut donc écrire sans problème que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (techniquement, si on veut être hyper rigoureux, on effectue un changement de variable en posant $u = \frac{1}{x}$, et l'expression obtenue n'est bien sûr pas un développement limité mais un développement asymptotique puisqu'on n'a plus vraiment un polynôme sous les yeux). Aucun problème ensuite pour multiplier tout cela par x (y compris le o, comme toujours) : $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. C'est merveilleux, on se retrouve donc à l'intérieur de notre ln avec une expression de la forme « 1+truc », avec un truc qui tend vers 0. Même plus besoin de développements limités à partir de cette étape, on se contente d'équivalents : $\ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim -\frac{1}{6x^2}$, et $x^2 \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim -\frac{1}{6}$ (ce qui revient à dire que toute l'expression à l'intérieur de l'exponentielle a pour limite $-\frac{1}{6}$). Autrement dit, on obtient la conclusion suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{6}}$. Il va de soi qu'obtenir une telle valeur par une autre méthode serait bien compliqué.

Une dernière remarque pour conclure ce bel exemple : il était nécessaire d'effectuer un développement limité du sinus à l'ordre 3 (au moins) pour retrouver à la fin un simple équivalent (et donc notre limite). On pouvait anticiper cela en constatant qu'il y aurait à effectuer un produit par x puis un autre par x^2, mais admettons que c'est tout de même loin d'être totalement clair.

Un dernier exemple avec des suites.

On cherche cette fois-ci à calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$ (un classique que certains d'autres vous auraient certainement eu le plaisir de faire en colle si ces dernières avaient eu lieu). Commençons déjà par constater qu'on a bel et bien une méchante forme indéterminée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (si vous n'êtes vraiment pas convaincu, écrivez-le sous la forme $2^{\frac{1}{n}}$, voire carrément sous la forme exponentielle $e^{\frac{1}{n}\ln(2)}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{2} = 3$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt[n]{3} = 2$, donc tout ce qui se trouve dans la parenthèse a pour limite 1. Quand on élève ceci à une puissance qui tend vers $+\infty$, on a bien une forme indéterminée.

Pour simplifier un peu l'expression de u_n, commençons par écrire que $\ln(u_n) = n\ln(3 \times 2^{\frac{1}{n}} - 2 \times 3^{\frac{1}{n}})$. On va même carrément poser une suite auxiliaire $v_n = 3 \times 2^{\frac{1}{n}} - 2 \times 3^{\frac{1}{n}}$ et écrire à nouveau nos puissances sous forme exponentielle : $v_n = 3e^{\frac{1}{n}\ln(2)} - 2e^{\frac{1}{n}\ln(3)}$. Les expressions à l'intérieur de chaque exponentielle ont une limite nulle (bien entendu, n tend ici vers $+\infty$), on peut donc en faire un développement limité à l'ordre 1 (ça suffira pour la suite du calcul, mais si on est prudent, on ira typiquement jusqu'à l'ordre 2 dans ce type de calcul), qui sera d'ailleurs techniquement un développement asymptotique puisque la variable est ici $\frac{1}{n}$ plutôt que le traditionnel x. Bref, on obtient $v_n = 3\left(1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Merveilleux, on a une expression de la forme « 1+truc » à mettre dans un ln pour remonter jusqu'au calcul de $\ln(u_n)$! Contentons-nous (comme dans l'exemple précédent de calcul de limite sur une fonction) de travailler désormais avec des équivalents : $\ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n}$, puis $\ln(u_n) = n\ln(v_n) \sim 3\ln(2) - 2\ln(3)$. Autrement dit, on a simplement $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 3\ln(2) - 2\ln(3)$. Il ne reste plus qu'un petit passage à l'exponentielle à effectuer : $\lim u_n = e^{3\ln(2)-2\ln(3)} = \frac{e^{3\ln(2)}}{e^{2\ln(3)}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$. Un résultat pour le moins inattendu.

3.2 Étude locale de fonctions.

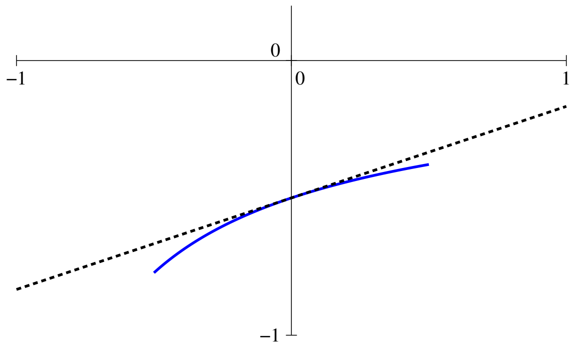
Les développements limités sont particulièrement efficaces pour étudier de façon très précise une fonction à un endroit donné (c'est même leur objectif initial !). Ainsi, le fait de connaitre un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f en a donne d'un seul coup les trois informations suivantes :

- comme la fonction admet un $DL_0(a)$, elle est continue en a, et la partie régulière de ce DL_0 (qui est donc simplement une constante) représente la valeur de $f(a)$. C'est encore plus intéressant quand on effectue ce genre de calcul sur une fonction qui n'était a priori pas définie en a, puisque le calcul du DL_0 permettra donc d'effectuer un prolongement par continuité de la fonction f au point a.
- si la fonction admet un $DL_1(a)$, on peut cette fois-ci affirmer que f est dérivable en a, et le coefficient devant $x - a$ dans le DL_1 correspond à la valeur de $f'(a)$. Autre façon de voir les choses, la partie régulière de ce DL_1 représente tout simplement l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a. Dans le cas d'une fonction qui n'était initialement pas définie en a, le calcul d'un $DL_1(a)$ permet donc à la fois de prouver la présence d'un prolongement par continuité, et de prouver la dérivabilité en a de la fonction prolongée.
- enfin, si on a poussé le calcul jusqu'à obtenir un $DL_2(a)$, le terme d'ordre 2 de ce DL_2 va nous fournir un équivalent de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente en a, qui donnera le signe local de cette différence et permettra donc d'en déduire la position relative de la courbe et de sa tangente. Pour mieux comprendre comment cela fonctionne, prenons tout de suite un exemple concret.

Un exemple simple d'étude locale en 0.

L'étude locale d'une fonction (ailleurs qu'en $\pm\infty$, cas particulier que nous évoquerons dans l'exemple suivant) consiste à faire (en un seul calcul de développement limité) l'étude des trois points signalés ci-dessus. Prenons pour ce premier exemple un cas où on n'a presque pas besoin de calcul (on va donc se concentrer sur l'interprétation) en posant $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ et en étudiant la fonction en 0 (autrement dit, on reprend et on développe le calcul de limite présenté un peu plus haut pour cette même fonction). On est ici dans le cas intéressant d'une fonction a priori non définie en 0, mais ça ne change rien au principe général, il faut commencer par calculer un développement limité à l'ordre 2 au moins (on précisera les choses à ce sujet après le calcul) de la fonction f en 0 (si on n'y arrive pas ou si on obtient une expression qui n'est pas un vrai développement limité et qui n'a notamment pas une limite finie en 0, ça veut tout simplement dire que la fonction f n'est pas prolongeable par continuité au point considéré). Ici, c'est immédiat, il faut simplement penser à écrire initialement un développement limité à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ en anticipant la division par x^2 qui va « faire perdre deux degrés » : $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. On interprète ensuite ce calcul en trois temps comme expliqué ci-dessus (attention à bien respecter la rédaction, notamment pour la position relative de la courbe et de la tangente, si vous voulez être rigoureux) :

- On commence par dire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$, autrement dit que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$. Cela revient exactement à justifier l'existence d'un prolongement par continuité de f en 0, en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$ (pour rédiger vite et mal).
- Ensuite on écrit que $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x)$, et ce DL_1 prouve que la fonction f est dérivable en 0 et que sa courbe admettra à cet endroit une tangente d'équation $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$. Si on préfère cela revient à dire que $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- Enfin, on écrit que $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$, et on en déduit que $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{4}x^2$ (il est **obligatoire** d'écrire cet équivalent pour en déduire correctement ce qui va suivre, la forme initiale du développement limité avec un o n'est pas suffisante). Comme $-\frac{1}{4}x^2$ est une expression négative, on en déduit que $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)$ est négatif **au voisinage de** 0 (attention, l'équivalence assure simplement que les deux expressions auront le même signe sur un voisinage de 0 qu'on ne maitrise absolument pas, et il est bien sûr hors de question de prétendre que le signe restera le même sur $\mathbb{R}$ tout entier ; si vraiment on veut étudier la position relative sur $\mathbb{R}$, on revient à une étude classique du signe de notre différence). Autrement dit, on a prouvé que la courbe représentative de f serait en-dessous de sa tangente sur un voisinage de 0. On peut illustrer ceci par un petit dessin, où on se restreint volontaire à ne dessiner qu'un petit morceau de courbe aux alentours de 0, puisque toutes les informations obtenues sont locales. Même indiquer une unité sur l'axe des abscisses est déjà un abus puisqu'on ne sait vraiment pas la largeur de l'intervalle sur lequel nos conclusions seront correctes.



Une dernière remarque : si par malheur le terme en x^2 s'annule dans notre développement limité, on va être bien embêtés pour déterminer la position relative de la courbe et de sa tangente. Dans ce cas, on n'a pas d'autre choix que de pousser un peu plus loin le calcul et aller jusqu'à un DL_3 de la fonction, et ce sera bien entendu le terme en x^3 qui donnera dans ce cas la position relative (si on est en 0, ce terme en x^3 changera de signe en 0, ce qui revient à dire que la position relative sera différente à gauche et à droite de 0 ; c'est tout à fait normal puisque le fait qu'il n'y ait pas de terme en x^2 dans le DL signifie que $f''(0) = 0$, et donc qu'il y a sur la courbe un point d'inflexion à cet endroit).

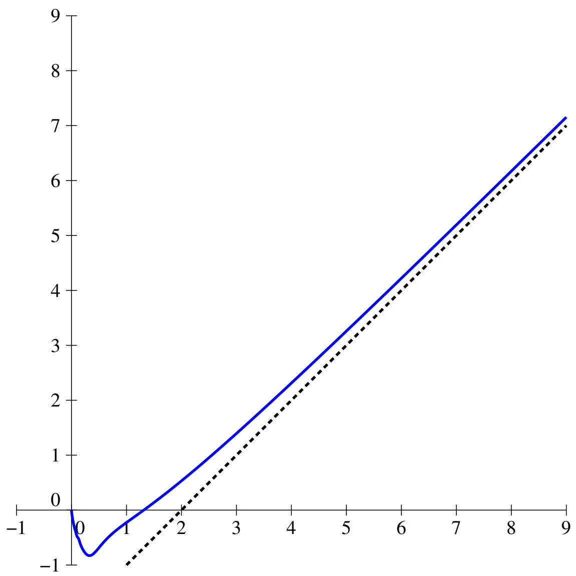
Un exemple plus compliqué en $+\infty$.

Les calculs présentés ci-dessus peuvent aussi très bien s'adapter à une étude locale en $+\infty$. Cette fois-ci le but ne sera évidemment pas de prolonger une fonction par continuité (ça n'aurait aucun sens), ni d'obtenir une position relative par rapport à une tangente, mais bel et bien de déterminer l'équation (et la position relative) d'une droite qui joue en quelque sorte le rôle de la tangente à la courbe quand la variable tend vers $+\infty$: une asymptote. Il y a une complication évidente, c'est justement que la variable tend vers $+\infty$ et qu'on ne pourra donc évidemment pas effectuer des calculs de développement limité come si de rien n'était. En fait, le principe sera toujours le même : puisqu'il faut « se ramener à 0 » pour pouvoir calculer des développements limités sereinement, on effectuera **systématiquement** un changement de variables du type $X = \dfrac{1}{x}$ pour avoir une variable X qui tend vers 0. Par ailleurs, les calculs qu'on effectuera ne seront en général pas tout à fait des calculs de développements limités, mais plutôt de développements asymptotiques, il restera typiquement des termes en $\dfrac{1}{X}$ qu'on ne trouverait pas dans un DL classique (ce qui est d'ailleurs tout à fait normal, si la courbe de la fonction admet en $+\infty$ une asymptote oblique, c'est que la fonction n'y a pas une limite finie). Allez, trève de bavardages, un calcul un peu moche en guise d'exemple :

On pose $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\sin(\frac{1}{x})} - 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et on souhaite étudier f au voisinage de $+\infty$. On commence donc par effectuer le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, ce qui donne ici, $f(x) = \dfrac{1}{X(X+1)}e^{\sin(X)} - \dfrac{2}{X}\ln(1+X)$. Pour avoir des fonctions définies en 0 et pouvoir effectuer un « vrai » DL, une astuce toute simple est de tout multiplier par X (alternativement, on met $\dfrac{1}{X}$ en facteur et on ne s'en préoccupe plus) : $Xf(x) = \dfrac{e^{\sin(X)}}{1+X} - 2\ln(1+X) = (e^{X-\frac{1}{6}X^3+o(X^4)})(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) - 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = \left(1 + X - \dfrac{1}{6}X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{6}X^3 + o(X^3)\right)(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) - 2X + X^2 - \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - X + X^2 - X^3 + X - X^2 + X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X^3 - 2X + X^2 - \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - 2X + \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{7}{6}X^3 + o(X^3)$.

Le calcul de DL a ici été effectué à l'ordre 3 par souci de prudence, mais normalement il suffit d'avoir trois termes dans notre DL pour pouvoir en tirer toutes les conclusions qui vont suivre, ici on a un quatrième terme qui ne servira à rien. En règle générale, il vaut mieux être prudent et viser « un ordre trop loin » au cas où le dernier terme s'annule inopinément, sinon il faudra refaire tous les calculs pour retrouver la position relative de la courbe et de l'éventuelle asymptote). Une fois ce beau DL obtenu, on divise tout par X puis on remonte le changement de variable, c'est-à-dire qu'on retransforme tout simplement les X en $\dfrac{1}{x}$, ce qui donne ici $f(x) = \dfrac{1}{X} - 2 + \dfrac{3}{2}X + o(X) = x - 2 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Il est temps d'interpréter ce développement asymptotique, ce qui va se faire en trois temps comme pour la tangente dans notre exemple précédent :

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, ce qui prouve tout simplement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 2 + o(1)$, ce qui revient exactement à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$, et donc prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- enfin, $f(x) - (x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$ (comme dans le cas des tangentes, il est indispensable d'écrire cette étape sous forme d'équivalent). Comme $\dfrac{3}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la courbe est située au-dessus de sa tangente dans un voisinage (hélas indéterminé) de $+\infty$. On peut bien sûr là aussi donner une allure de portion de courbe pour illustrer (on se gardera bien d'essayer d'étudier plus complètement la fonction f, on n'y arriverait de toute façon pas !). J'ai tout de même donné toute la courbe dans la figure ci-dessous :



Dernière remarque : si on vous demande d'effectuer une étude locale (ou simplement de déterminer l'équation d'une asymptote) en $-\infty$, la méthode sera exactement la même. La seule différence pourra être au niveau du signe obtenu pour la position relative.

3.3 Développements asymptotiques de suites.

Dernier type d'application des calculs de développements limités que nous verrons dans ce chapitre, l'obtention d'informations sur des suites dont on n'est pas capables de calculer exactement le terme général. Ce sera typiquement le cas de suites définies implicitement (si vous avez oublié tout ce qu'on a déjà vu sur les suites implicites, je vous laisse relire la dernière partie du cours du chapitre sur la continuité). Le principe ici est d'obtenir un développement asymptotique, c'est-à-dire d'écrire que le terme général u_n de la suite est égal à une somme de termes de plus en plus négligeables quand n tend vers $+\infty$ (avec un o au bout puisqu'on n'obtiendra bien sûr jamais une égalité parfaite). En fait, il s'agit de généraliser en quelque sorte les renseignements obtenus lorsqu'on calcule la limite de la suite, puis un équivalent de son terme général (dans le cas où la limite est infinie ou égale à 0). Un exemple où je mets des termes aléatoires : on prouve dans un premier temps que la suite tend vers $+\infty$, puis on arrive à obtenir un équivalent de la forme $u_n \sim 2n$ (c'est plus précis que la limite), puis on « complète » cet équivalent par un terme négligeable par rapport à n, par exemple $u_n = 2n + 3 + o(1)$, ou encore $u_n = 2n + \ln(n) + o(\ln(n))$ (attention, dans ce genre de calcul, il n'y a aucune raison a priori que tous nos termes soient « polynômiaux », même si ce sera le cas le plus fréquent), puis on peut espérer aller encore plus loin, par exemple $u_n = 2n + \ln(n) + 3 - \dfrac{1}{2\ln(n)} + \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (dans ce exemple, les termes sont bien classés par ordre de grandeur décroissant).

Une ou deux remarques supplémentaires avant de se lancer dans les calculs : bien sûr, tous ces développements s'effectueront à partir d'une variable n qui tend vers $+\infty$, si on calcule en cours de route de vrais développements limités, il faudra donc bien faire attention à les appliquer à une expression qui tend vers 0, typiquement à $\dfrac{1}{n}$ (on fera le calcul directement sans poser de changement de variable pour ne pas alourdir les calculs, mais théoriquement il faudrait le faire). Par ailleurs, on aura souvent besoin pour obtenir un développement asymptotique à plusieurs termes d'effectuer plusieurs calculs successifs et similaires pour faire apparaitre les différents termes « un par un » en exploitant à chaque fois le résultat du calcul précédent. C'est un peu différent de ce qu'on fait lors d'un calcul de développement limité où on fixe dès le départ l'ordre auquel on va effectuer le calcul, et on ne fait ensuite le calcul qu'une seule fois. Dans certains cas, on pourra toutefois effectuer un seul calcul avec une rédaction du type « identification des coefficients » (comme la méthode de calcul de DL_5 de la fonction tan à partir de l'équation différentielle $\tan' = 1 + \tan^2$, par exemple), mais il faudra pour cela déjà connaitre la forme générale du développement asymptotique, ce qui n'est pas toujours évident. On donnera cette méthode dans le premier exemple ci-dessous, mais après avoir effectué un premier calcul par la méthode « classique ».

Développement d'une suite implicite classique.

Nous allons reprendre pour ce premier exemple très détaillé l'étude d'une suite implicite que nous avions déjà évoquée dans le chapitre sur la continuité. On définit le réel u_n (pour tout entier $n \geqslant 3$) comme étant la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Nous avions prouvé à l'époque que cette équation admettait bien des solutions lorsque $n \geqslant 3$, et que la suite (u_n) ainsi construite était décroissante et tendait vers 0 (je ne reviendrai pas sur ces démonstrations). On souhaite maintenant obtenir des informations plus précises sur le comportement de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, sachant qu'il est bien entendu illusoire d'espérer calculer explicitement la valeur de u_n.

Première étape du calcul, nous allons chercher un équivalent. Pour cela, constatons que, comme la suite converge vers 0, on peut affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{u_n} = 1$. Or, par définition, u_n est solution de l'équation $e^{u_n} = nu_n$, ou si on préfère $u_n = \dfrac{e^{u_n}}{n}$. Mais d'après ce qu'on vient d'affirmer, $e^{u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ (on n'écrira plus les $n \to +\infty$ en-dessous des égalités et des équivalents pour la suite des calculs).

Parfait, peut-on maintenant obtenir mieux, c'est-à-dire en fait obtenir un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{n}$? Oui, il suffit de reprendre l'égalité déjà utilisée ci-dessus et de calculer $u_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{e^{u_n}}{n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{e^{u_n} - 1}{n}$. Or, on reconnait dans le membre de droite une forme d'équivalent classique : comme on sait depuis le début que u_n tend vers 0, on a le droit de dire que $\dfrac{e^{u_n} - 1}{n} \sim \dfrac{u_n}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$, en utilisant pour la dernière simplication le résultat du calcul précédent. On a donc prouvé que $u_n - \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$, ce qu'on peut écrire sous forme de développement asymptotique : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (attention, quand on passe le $\dfrac{1}{n}$ dans le membre de droite, il faut repasser à une écriture avec un o et pas un simple équivalent qui n'aurait plus vraiment de sens, je vous laisse méditer pourquoi).

Excellent, mais peut-on obtenir encore mieux ? Pourquoi pas, il faudrait maintenant un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ pour préciser un peu ce qui se trouve pour l'instant dans le $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Mais nous allons avoir un problème technique, la méthode précédente (qui n'utilisait pas le moindre développement limité) ne fonctionne plus. À la place, il va être temps de recourir à un calcul un peu plus brutal : on part de l'égalité $u_n = \dfrac{e^{u_n}}{n}$, et on va simplement remplacer dans l'exponentielle u_n par le début de son développement asymptotique, pour pouvoir écrire un développement limité de l'exponentielle (à l'ordre 2 en la variable $\dfrac{1}{n}$ puisque ce qu'on met dans l'exponentielle est pour l'instant d'ordre 2). et la division par n va magiquement nous transformer ce développement à l'ordre $\dfrac{1}{n^2}$ en développement à l'ordre $\dfrac{1}{n^3}$, nous donnant par là même un terme de plus dans le développement asymptotique de u_n. Écrivons le calcul : $u_n = \dfrac{1}{n} e^{u_n} = \dfrac{1}{n} e^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) =$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Pour le DL de l'exponentielle, on a techniquement posé $u = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et on a fait tranquillement notre développement à l'ordre 2 comme prévu. Remarquons que ceux qui s'attendaient à pouvoir deviner facilement les termes du développement asymptotique de u_n à partir des calculs précédents ont vraisemblablement déjà changé d'avis.

Maintenant qu'on a compris le principe, on peut constater quelque chose d'assez fascinant : si on reprend notre calcul de développement limité avec l'information acquise lors du dernier calcul, on obtiendra automatiquement un terme supplémentaire, et on peut ainsi, quitte à refaire beaucoup de fois ce même calcul, obtenir un développement asymptotique à une précision arbitraire de u_n, c'est assez magique. Contentons-nous d'un dernier tour de moulinette : $u_n = \frac{e^{u_n}}{n} = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{8}{3n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Je n'ai pas détaillé le calcul du DL de l'exponentielle, il faut sûr faire attention à ne pas oublier de termes en développement le carré ou le cube de notre somme, et cela devient bien sûr de plus en plus délicat si on effectue encore d'autres étapes de calcul.

La méthode présentée ci-dessous est la seule que je vous demande de maitriser, mais je vais tout de même vous en présenter une autre qui a l'immense mérite de ne nécessiter qu'un seul calcul, mais le gros défaut de demander qu'on sache dès le départ à quoi ressemble le développement asymptotique de la suite. Supposons donc qu'on ait deviné que notre développement serait (si on le pousse jusqu'à quatre termes) de la forme $u_n = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, avec bien sûr a, b, c et d qui sont des constantes réelles à déterminer. On peut alors écrire directement, sur le modèle des calculs précédents, que $u_n = \frac{e^{u_n}}{n} = \frac{1}{n}e^{\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})}$

$$= \frac{1}{n}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{a^2}{2n^2}+\frac{b^2}{2n^4}+\frac{ab}{n^3}+\frac{ac}{n^4}+\frac{a^3}{6n^3}+\frac{a^2b}{2n^4}+\frac{a^4}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}+\frac{a}{n^2}+\frac{2b+a^2}{2n^3}+\frac{6c+6ab+a^3}{6n^4}+\frac{24d+12b^2+24ac+12a^2b+a^4}{24n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Beurk. Bon, il ne reste plus qu'à identifier tout ça avec ce dont on est partis (comme pour un développement limité, la « partie régulière » d'un développement asymptotique de ce genre est nécessairement unique) : le coefficient en $\frac{1}{n}$ donne $a = 1$; celui en $\frac{1}{n^2}$ donne $b = a$, donc $b = 1$; puis celui en $\frac{1}{n^3}$ donne $c = \frac{2b+a^2}{2}$, donc $c = \frac{3}{2}$; ensuite, celui en $\frac{1}{n^4}$ donne $d = \frac{6c+6ab+a^3}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$; et on a même poussé le calcul un cran trop loin puisqu'on voit que le terme en $\frac{1}{n^5}$ sera de la forme $\frac{24d+12b^2+24ac+12a^2b+a^4}{24n^5} = \frac{64+12+36+12+1}{24n^5} = \frac{125}{24n^5}$.

Conclusion ébouriffante de ce brillant calcul : $u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{8}{3n^4}+\frac{125}{24n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)$.

Un exemple encore beaucoup plus laid.

Pour tout entier naturel n, on définit le réel u_n comme étant l'unique solution positive de l'équation $x^4+x^3 = n$. Cette équation admet effectivement une solution unique puisque la fonction $g : x \mapsto x^4+x^3$, qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, effectue une bijection de $[0,+\infty[$ sur lui-même. Comme dans notre premier exemple, déterminer un développement asymptotique de la suite consiste à en trouver un équivalent, puis un équivalent de la différence entre u_n et son équivalent, et ainsi de suite, pour obtenir une valeur approchée de u_n comme somme de termes d'ordres de grandeur décroissants.

Dans notre cas, on peut commencer par remarquer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet, en notant g^{-1} la réciproque de g sur $[0,+\infty[$, $u_n = g^{-1}(n)$, et d'après le théorème de la bijection, $\lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty$. Une fois qu'on connait cette limite, on peut écrire que $u_n^3 = o(u_n^4)$, ou encore que $u_n^4 + u_n^3 \sim u_n^4$. Comme par définition $u_n^4 + u_n^3 = n$, on en déduit que $u_n^4 \sim n$, soit $u_n \sim n^{\frac{1}{4}}$. Pour obtenir cet équivalent, on a en fait utilisé, en factorisant l'équation par u_n^4, que $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+o(1)} \sim n$.

On dispose maintenant d'une information supplémentaire, qui va nous permettre de refaire le calcul à un ordre plus précis (n'oubliez pas pour le calcul que $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers 0, ce qui permet d'utiliser les DL classiques du cours) : $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+n^{-\frac{1}{4}}+o(n^{-\frac{1}{4}})} = n(1-n^{-\frac{1}{4}}+o(n^{-\frac{1}{4}})) = n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}})$. Il ne reste plus qu'à passer tout ça à la puissance $\dfrac{1}{4}$ (en exploitant le développement limité classique de $(1+x)^\alpha$ avec bien sûr $\alpha = \dfrac{1}{4}$, dont le début va être $(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \dfrac{1}{4}x + o(x)$) : $u_n = (n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \times (1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}}\left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + o(1)$.

Si on est (très) courageux, on peut reprendre le calcul pour obtenir un terme de plus, ce qui va être nettement plus pénible car, outre les factorisation nécessaires pour bien appliquer nos développements limités à des variables qui tendent vers 0, il faudra en plus effectuer un vrai DL de quotient pour « faire remonter » le u_n initialement au dénominateur vers le numérateur du dénominateur de notre fraction (oui c'est vraiment moche). Allons-y : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + o(1)} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n^{-\frac{1}{4}}\left(1 + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$.
On enchaîne : $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+n^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}+o(n^{-\frac{1}{2}})} = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$. On passe une dernière fois le tout à la puissance $\dfrac{1}{4}$ (le terme d'ordre 2 dans le développement de $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ est égal à $\dfrac{\frac{1}{4}\times(-\frac{3}{4})}{2}x^2 = -\dfrac{3}{32}x^2$) : $u_n = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{16}n^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \dfrac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{32}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$.
Conclusion de ce sublime calcul : $u_n = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{32n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$.