Chapitre 15 : Analyse asymptotique

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2018

La mathématique est une science dangereuse :
elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau
de l'homme car il n'a que ça à faire.

Perles du bac.

1 Négligeabilité, équivalence

2 Développements limités

2.1 Théorie

2.2 Formulaire, première partie

2.3 Opérations sur les développements limités

2.4 Formulaire, deuxième partie

Théorème 1. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\mathrm{th}(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$
- $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4}\dfrac{x^5}{5} + \dots + \dfrac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$

Démonstration. Cette démonstration détaillée de chacune des formules sera accompagnée de divers commentaires visant à rendre le plus facile possible la compréhension des calculs en l'absence de cours traditionnel. Si certains détails continuent à vous échapper, n'hésitez bien sûr pas à poser des questions lors de nos séances sur Discord !

- Pour la fonction tangente, les trois calculs vus en cours vendredi dernier devraient suffire ! Un simple petit complément en passant : je vous ai signalé en cours qu'il n'existait absolument pas de formule générale pour anticiper les coefficients du DL_n de la fonction tangente, contrairement à toutes les autres fonctions usuelles étudiées auparavant pour lesquelles on dispose de formules simples. Pour vous en convaincre, sachez que les deux termes suivants de ce DL sont égaux à $\dfrac{17}{315}x^7$, puis à $\dfrac{62}{2\ 835}x^9$ (je vous laisse les retrouver en guise d'entrainement si vous avez vraiment trop de temps à perdre). En pratique, vous ne devez donc connaitre pour la fonction tangente que les **trois** premiers termes du DL (ceux donnés dans le théorème ci-dessus), mais aussi savoir les retrouver (de préférence rapidement) par le calcul.

- Le développement limité de la fonction th n'est **pas à connaitre** puisque cette fonction ne fait pas partie de la liste de fonctions usuelles établie en début d'année. Je ne l'ai donné que pour signaler son étonnante similarité avec celui de la fonction tangente « classique » (rappelons d'ailleurs en passant que $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$). Cette similarité ne s'arrête pas aux trois premiers termes, puisque les termes suivant du DL de la fonction th sont égaux à $-\dfrac{17}{315}x^7$ et $\dfrac{62}{2\ 835}x^9$ (seule l'alternance de signe crée une différence avec la fonction tangente).
  Pour calculer ce DL, on dispose en fait des mêmes techniques que pour la fonction tan. On peut par exemple commencer par calculer un DL_5 de l'inverse $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$.
  On pose $u = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, la variable u tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut même préciser que $u \sim \dfrac{x^2}{2}$, ce qui permettra de n'effectuer la première partie de notre développement limité qu'à l'ordre 2 (on aura en effet $u^3 \sim \dfrac{x^6}{8} = o(x^5)$). On utilise bien sûr la formule vue précédemment dans le cours pour calculer $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ (dans le développement du carré, seul le carré du premier terme n'est pas négligeable par rapport à x^5).
  Il ne reste plus qu'à effectuer un produit : $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x) \times \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
  $= \left(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) = x - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{24}x^5 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
  Pour les plus courageux qui voudraient redémontrer la formule par d'autres méthodes, je rappelle que la dérivée de la fonction vérifiée $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$, ce qui permet soit un calcul direct du DL via primitivation de celui de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, soit un calcul par identification à partir de l'équation différentielle vérifiée par la fonction, en supposant dès le départ un DL de la forme $\mathrm{th}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ (on sait que la fonction est impaire) pour alléger un peu les calculs.

- Le cas de la fonction arctan avait déjà été évoqué en cours, le plus simple (et de loin) est d'exploiter la dérivée $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme x^2 a pour limite 0 lorsque x tend vers 0, on peut appliquer le DL du cours de $\dfrac{1}{1+x}$ en « remplaçant » les x par des x^2 dans la formule (techniquement il s'agit en fait d'une composition où on a posé $u = x^2$). On obtient alors, à l'ordre $2n$, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ (la fonction étant bien sûr paire, il n'y aura que des puissances paires dans ce DL). Il ne reste plus qu'à primitiver ce DL, sans ajouter de constante puisque la fonction arctan s'annule en 0, et on trouve comme prévu $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

  Autre méthode possible, nettement plus sophistiquée, pour retrouver le DL_5 de la fonction arctan, utiliser le fait que $\arctan(\tan(x)) = x$ (le fait qu'on ne connaisse que le DL_5 de la fonction tan limite forcément l'emploi de cette méthode). En partant du fait que la fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire, elle admet nécessairement en 0 un DL_5 de la forme $\arctan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. Posons alors $u = \tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$, variable qui a pour limite 0 quand x tend vers 0, et composons par la fonction arctan pour obtenir $\arctan(u) = au + bu^3 + cu^5 + o(x^5) = a\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5\right) + b\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5\right)^3 + c\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5\right)^5 + o(x^5)$. Quand on développe tout cela à l'ordre 5, on ne garde dans le dernier terme que le cx^5, tout le reste étant négligeable par rapport à x^5. Par contre, quand on élève la parenthèse au cube, il faut garder à la fois le terme bx^3 et le triple produit $b \times 3x^2 \times \dfrac{1}{3}x^3 = bx^5$. Finalement, on trouve donc $\arctan(u) = ax + \dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{2a}{15}x^5 + bx^3 + bx^5 + cx^5 + o(x^5) = ax + \left(\dfrac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\dfrac{2a}{15} + b + c\right)x^5 + o(x^5)$. Or, on sait très bien que $\arctan(u) = \arctan(\tan(x)) = x$, et que, par unicité du DL_5 de la fonction qui à x associe x, son DL_5 doit simplement être égal à $x + o(x^5)$. Par identification des coefficients, on obtient alors les conditions $a = 1$, puis $\dfrac{a}{3} + b = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{3}$; et enfin $\dfrac{2a}{15} + b + c = 0$, donc $c = -\dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$, ce qui correspond bien aux coefficients du DL_5 de la fonction arctan.

- On peut utiliser pour la fonction arcsin les mêmes techniques que ci-dessus pour la fonction arctan. Rappelons que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Commençons par calculer le DL_{2n} de $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$ (même principe que ci-dessus pour celui de $\dfrac{1}{1+x^2}$). On peut bien sûr composer ce DL par celui vu plus haut dans le cours de $\sqrt{1+u}$ en posant $u = x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+2})$ (variable qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0), mais il est hélas compliqué d'obtenir une formule générale simple pour le coefficient d'ordre $2n$ de ce DL, formule qui existe pourtant bel et bien ! Contentons-nous d'effectuer le calcul à l'ordre 5, ce qui ne nécessite pour la première étape du calcul que de l'ordre 2 (cf le calcul du DL de th un peu plus haut pour la justification rigoureuse de ce calcul raccourci) : $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + o(x^5)$, donc $\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(x^2 + x^4) - \dfrac{1}{8}(x^2 + x^4)^2 + o(x^5) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^5) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^5)$. On peut désormais primitiver l'expression obtenue (toujours sans ajouter de constante puisque $\arcsin(0) = 0$) pour trouver $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$, ce qui correspond bien à la formule annoncée dans le théorème.

  La démonstration rigoureuse de la formule pour une valeur quelconque de n est vraiment délicate, on ne la fera pas. Les plus courageux tenteront d'effectuer pour arcsin un calcul similaire à celui effectué ci-dessus pour arctan (à l'aide de la réciproque), mais ce calcul ne permet pas non plus d'obtenir aisément la formule générale. Ils pourront aussi essayer d'exprimer les coefficients de cette formule générale à l'aide de factorielles et de puissances de 2, c'est un bon exercice de calcul.

- Aucun calcul nécessaire pour la dernière fonction de la liste puisqu'on sait (si on n'a pas oublié les recoins obscurs du chapitre sur les fonctions trigonométriques réciproques) que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, égalité valable sur tout l'intervalle de définition de ces deux fonctions.

$\square$