Chapitre 17 : Applications linéaires

PTSI B Lycée Eiffel

30 mars 2020

J'ai simplement pensé à l'idée d'une projection, d'une quatrième dimension invisible,
autrement dit que tout objet de trois dimensions, que nous voyons froidement,
est une projection d'une chose à quatre dimensions, que nous ne connaissons pas.

Marcel Duchamp

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé. À la fin, l'ingénieur demande au matheux :
« Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? » « C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension n, et ensuite il suffit de prendre $n = 9$. »

Introduction

1 Vocabulaire

2 Rang

Définition 1. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Remarque 1. La famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qu'elle contient. Cette notion de rang peut très bien s'appliquer à une famille de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension infinie (puisque la famille elle-même est finie, et l'espace vectoriel qu'elle engendre est donc de dimension finie).

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le **rang de** f, s'il existe, est la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Remarque 2. Pour faire le lien avec la définition précédente, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E. Pour être très rigoureux, cette égalité ne peut avoir de sens que si E est de dimension finie, alors que le rang de f peut être défini même si E n'est pas de dimension finie.

Théorème 1. Théorème du rang.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Remarque 3. Le théorème du rang n'affirme absolument pas que le noyau et l'image de f sont supplémentaires (ce qui ne pourrait de toute façon avoir de sens que pour un endomorphisme, sinon le noyau et l'image ne sont pas des sous-espaces vectoriels du même espace), c'est faux en général (voir l'exemple suivant la démonstration), mais simplement que les dimensions du noyau et de l'image sont « complémentaires ». En gros, dans le cas où f est un endomorphisme, le théorème affirme que une application linéaire est « autant injective qu'elle n'est surjective ». Imaginons par exemple $f : E \to E$, avec E un espace vectoriel de dimension 3. Si l'application n'est pas surjective, cela signifie que $\text{rg}(f) < 3$. Si ce rang est égal à 2, alors la dimension du noyau sera égale à 1, si ce rang est égal à 1, le noyau sera de dimension 2. Plus l'image est réduite, plus le noyau est au contraire important.

Démonstration. L'idée est de démontrer qu'à défaut d'être supplémentaire de $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker(f)$ (et donc a la même dimension, ce qui prouve immédiatement le théorème). Soit donc G un supplémentaire de $\ker(f)$ (cela existe forcément dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est une conséquence du théorème de la base incomplète). Montrons que $f_{|G}$ (la restriction de f au sous-espace vectoriel G) est un isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$. Soit $u \in \ker(f_{|G})$, on a donc $f(u) = 0$, soit $u \in \ker(f)$, mais aussi (puisqu'on ne s'intéresse qu'à la restriction de f à G) $u \in G$. Comme G et $\ker(f)$ sont supplémentaires, leur intersection est réduite au vecteur nul, donc $u = 0$. L'application $f_{|G}$ est donc injective. Soit maintenant $v \in \text{Im}(f)$, donc $v = f(u)$, avec $u \in E$. Ce vecteur u peut se décomposer en $u_G + u_K$ (toujours en exploitant le fait que G et $\ker(f)$ sont supplémentaires), avec $u_G \in G$ et $u_K \in \ker(f)$. Comme $f(u_K) = 0$, $v = f(u) = f(u_G + u_K) = f(u_G)$ donc $v \in \text{Im}(f_{|G})$ (le vecteur v est bien l'image par f d'un vecteur u_G appartenant à G), ce qui prouve que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f_{|G})$. L'application f restreinte à G est don également surjective, c'est bien un isomorphisme, le théorème en découle. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'application linéaire définie par $u(x, y, z, t) = (x-y, x-y, t-z, z-t)$. On constate aisément que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, -1))$ (les images des deux premiers vecteurs de la base canonique sont opposées, celles des deux derniers également), donc f est de rang 2. La détermination du noyau amène de même à un système constitué de deux paires d'équations identiques, et $\ker(f) = \{(x, x, z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Le noyau est également de dimension 2 (encore heureux, sinon le théorème du rang serait mis en défaut), mais noyau et image ne sont pas supplémentaires (puisqu'ils contiennent tous deux le vecteur $(1, 1, 0, 0)$, l'intersection est en fait de dimension 1).
On peut aller ici un peu plus loin et s'amuser ici à calculer $f^2(x, y, z, t)$ (comme toujours, ce qu'on note f^2 c'est $f \circ f$). En notant $X = x - y$ et $Z = z - t$, on a $f(x, y, z, t) = (X, X, Z, -Z)$, donc $f^2(x, y, z, t) = f(X, X, Z, -Z) = (X-X, X-X, Z+Z, -Z-Z) = (0, 0, 2z-2t, 2t-2z)$. On en déduit que $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}((0, 0, 1, -1))$ et $\ker(f^2) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$ (calculs vraiment débiles laissés au lecteur). Cette fois-ci, les deux sous-espaces sont supplémentaires. D'ailleurs, les composées suivantes de f ont les mêmes noyaux et images que f^2. On peut prouver plus généralement que, pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie, les noyaux et images de f^k finissent par se stabiliser sur des sous-espaces supplémentaires (c'est l'objet d'un exercice de la feuille d'exercices).

Corollaire 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est bijectif si et seulement si il est injectif ou surjectif.

Démonstration. En effet, si par exemple f est injectif, $\dim(\ker(f)) = 0$, donc en appliquant le théorème du rang $\text{rg}(f) = \dim(E)$, ce qui assure que $\text{Im}(f) = E$, et donc que f est également surjectif. C'est à peu près la même chose si on suppose f surjectif. □

Exemple : La remarque précédente ne s'applique absolument pas en dimension infinie. Si on note f l'application définie sur l'ensemble de toutes les suites réelles par $f(u_n) = v_n$, où $v_n = u_{n+1}$ (décalage de tous les termes de la suite vers la gauche, en supprimant le premier). L'application f est surjective mais pas injective. En fait, en notant $g(u_n) = w_n$, avec $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = u_{n-1}$, on a $f \circ g = \mathrm{id}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{id}$ (on transforme le premier terme de la suite en 0). Autrement dit, g est une « réciproque à droite » de f mais pas à gauche. Ce genre de choses n'arrive absolument jamais en dimension finie, si on a deux applications linéaires f et g qui vérifient $f \circ g = \mathrm{id}$, on aura automatiquement $g \circ f = \mathrm{id}$, et f et g seront donc bijectives et réciproques l'une de l'autre. Sur l'exemple donné en dimension infinie, on peut vérifier que g est injective mais pas surjective.

Exemple : Soient x_0, x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme défini par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Le noyau de f est réduit au polynôme nul car c'est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n pouvant avoir $n+1$ racines distinctes. Par conséquent, f est un isomorphisme. Cela prouve que, pour tous réels a_0, a_1, …, a_n, il existe un unique polynôme de degré n (au plus) tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = a_i$. Vous le saviez en fait déjà, il s'agit des polynômes interpolateurs de Lagrange (mais le théorème du rang permet donc de prouver leur existence sans avoir besoin le moins du monde de les calculer).

Définition 3. Une **forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exemple : Si note E l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$, l'application $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\, dt$ est une forme linéaire sur E (application linéaire donnant des images qui sont simplement des nombres réels).

Proposition 1. Si E est de dimension finie, le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E.

Démonstration. Comme, par définition, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, il n'y a pas beaucoup de choix pour le rang d'une forme linéaire : soit il est nul, et f est alors l'application nulle ; soit il vaut 1, et d'après le théorème du rang on a alors $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - 1$. □

Exemple : La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (rappelons que la trace d'une matrice carrée est définie comme la somme de ses coefficients diagonaux). L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Projecteurs et symétries

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps (et qui représentent vraiment le même type de transformations géométriques que dans le plan ou dans l'espace, même si c'est bien sûr plus délicat à visualiser dans des espaces vectoriels plus compliqués).

Définition 4. Soit E un espace vectoriel réel. L'**homothétie de rapport** λ est l'endomorphisme de E défini par $f(x) = \lambda x$. Autrementdit, $f = \lambda\, \mathrm{id}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 4. Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport λ, mais dans le cadre des espaces vectoriels, le centre de l'homothétie sera toujours en 0 (c'est indispensable si on veut qu'il puisse s'agir d'une application linéaire, puisque le vecteur nul doit rester invariant par notre application).

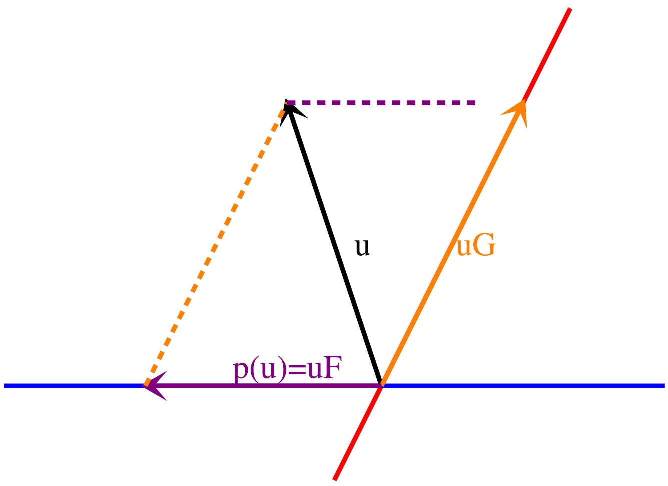
Proposition 2. Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E, son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Une démonstration à la portée de tous : $(\lambda\, \mathrm{id}) \circ \left(\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{id}\right) = \mathrm{id}$. □

Remarque 5. En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de E (ici, le terme « commutent » se rapporte à l'opération de composition, deux endomorphismes commutent si $f \circ g = g \circ f$). On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.

Définition 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un même espace vectoriel E. On peut donc décomposer tout vecteur $u \in E$ sous la forme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$ (et cette décomposition est unique). La **projection sur F parallèlement à G** est alors l'application linéaire $p : u \mapsto u_F$.

Remarque 6. Cette application est bien une application linéaire, car la décomposition de $\lambda u + \mu v$ dans $F \oplus G$ est simplement $(\lambda u_F + \mu v_F) + (\lambda u_G + \mu v_G)$. Surtout, ce type d'application correspond vraiment à une projection comme on en fait dans le plan. Attention par contre, la notion de projection **orthogonale** n'a absolument aucun sens dans un espace vectoriel quelconque (en fait, la notion d'orthogonalité n'existe pas dans les espaces vectoriels tant qu'on n'a pas ajouté à la structure d'espace vectoriel un outil supplémentaire, en l'occurrence ce qu'on appellera plus tard un produit scalaire ; au contraire, la notion de parallélisme est intrinsèque à la structure d'espace vectoriel, elle existe naturellement dès que l'ensemble E est muni des deux opérations permettant d'en faire un espace vectoriel). Pour illustrer, je vais me contenter d'un schéma dans $\mathbb{R}^2$ (la droite en bleu est ici F, la droite en rouge est G), où on projette donc sur une droite parallèlement à une autre (droites passant nécessairement par l'origine, ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$). C'est le seul cas intéressant qu'on puisse faire en dimension 2, puisque les sous-espaces F et G doivent être supplémentaires. Mais le principe est le même dans un espace de dimension quelconque : on « découpe » le vecteur u en deux morceaux appartenant respectivement à F et à G, et on ne garde que le morceau appartenant à F, ce qui revient bien à projeter sur F parallèlement à G.



Les algébristes, qui sont comme chacun sait des gens bizarres, utilisent également le terme **projecteur** comme synonyme de projection.

Remarque 7. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, $q = \mathrm{id} - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet, avec les notations introduites ci-dessus, $q(u) = u_G = u - u_F = (\mathrm{id} - p)(u)$.

Proposition 3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, avec les notations de la définition,

- $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$.
- $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
- $u \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(u) = u$ (ce qu'on peut aussi écrire sous la forme $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id})$).

Démonstration. Si p est un projecteur, on a effectivement $p(p(u)) = p(u_F) = u_F = p(u)$ (l'égalité $p(u_F) = u_F$ découle simplement du fait que, pour un vecteur comme u_F qui appartient à F, la décomposition dans $F \oplus G$ s'écrit très bêtement $u_F = u_F + 0$). On a donc prouvé l'implication p projection $\Rightarrow p \circ p = p$.

Avant de montrer la réciproque, prouvons les autres propriétés, qui sont toutes faciles : si $u \in \ker(p)$, alors $p(u) = 0$, donc $u_F = 0$, ce qui est équivalent à dire que $u = u_G \in G$, donc $\ker(p) \subset G$. La réciproque est évidente : si $u \in G$, sa décomposition dans $F \oplus G$ s'écrit simplement $u = 0 + u$, donc $u_F = 0$ et $p(u) = 0$. De même, $\mathrm{Im}(p) \subset F$ est évident, et tout élément de f est sa propre image par p (cf le tout début de cette démonstration), donc $\mathrm{Im}(p) = F$.

L'égalité $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ découle alors du fait que $E = F \oplus G$. Enfin, $p(u) = u$ équivaut à $u = u_F$, donc $u \in F = \mathrm{Im}(p)$.

Revenons alors à notre réciproque : si $p \circ p = p$, notons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$. On vérifie facilement que F et G sont supplémentaires : d'une part, si $u \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $u = p(v)$ (puisqu'il est dans l'image) et $p(u) = 0$ (puisqu'il est dans le noyau), ce qui implique $p \circ p(v) = 0$, donc $p(v) = 0$, c'est-à-dire $u = 0$; d'autre part, on peut toujours écrire $u = p(u) + (u - p(u))$ (oui, oui, l'astuce belge peut servir aussi en algèbre linéaire), avec $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$, et $u - p(u) \in \ker(p)$ puisque $p(u - p(u)) = p(u) - p \circ p(u) = 0$. On peut donc écrire $u = u_F + u_G$, avec $p(u) = u_F$, ce qui prouve bien que p est le projecteur sur F parallèlement à G. □

Remarque 8. Ce théorème est extrêmement utile en pratique pour démontrer qu'une application linéaire f est un projecteur, et déterminer sur quoi et parallèlement à quoi on projette (ce qu'on appelle les **éléments caractéristiques** de la projection). Il suffit en effet de prouver par un calcul direct que $f \circ f$ (on sait alors que c'est une projection), puis de calculer le noyau et l'image de f (l'image sera l'espace sur lequel on projette, le noyau l'espace parallèlement auquel on projette). En plus, on peut calculer l'image d'un projecteur très rapidement en résolvant simplement l'équation $f(u) = u$ (attention, cette méthode ne marche **pas du tout** pour une application linéaire quelconque).

Exemple : L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2}\right)$ est une projection. Le plus simple pour le prouver est de constater que $p \circ p = p$ (c'est ici très rapide). Le noyau de p est constitué des vecteurs pour lesquels $x + y = 0$, autrement dit $F = \ker(p) = \mathrm{Vect}((1,-1))$, et l'image de ceux vérifiant $p(x,y) = (x,y)$, soit $\frac{x+y}{2} = x = y$, donc $x = y$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((1,1))$.

Définition 6. Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la définition des projections, la **symétrie par rapport à F parallèlement à** G est l'application linéaire $s : x \mapsto x_F - x_G$.

Proposition 4. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}$. Dans ce cas,

- $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$.
- $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$.
- $s = 2p - \mathrm{id}$, en notant p la projection sur F parallèlement à G.

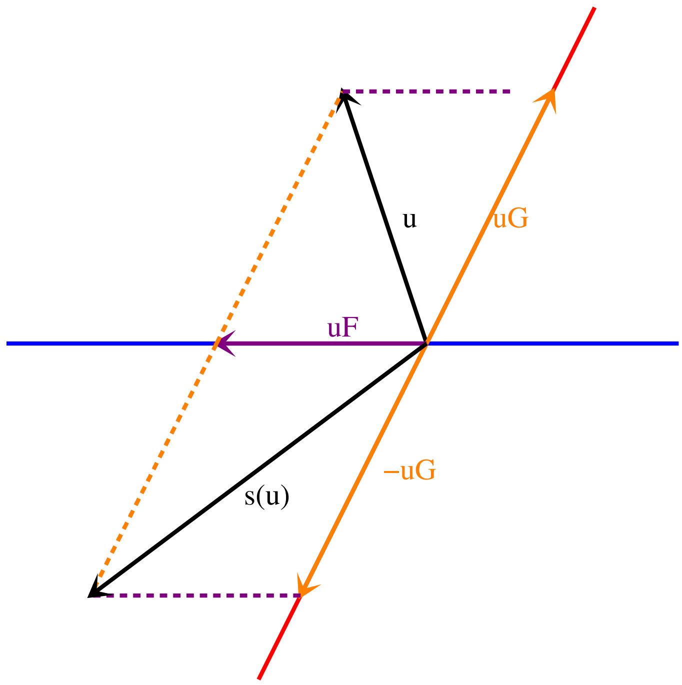
Remarque 9. La caractérisation des espaces F et G comme noyaux de $s - \mathrm{id}$ et de $s + \mathrm{id}$ signifie simplement ceci : les vecteurs appartenant à l'espace par rapport auquel on symétrise sont exactement ceux vérifiant $s(u) = u$ (vecteurs invariants par la symétrie), ceux appartenant à l'espace parallèlement auquel on symétrise sont exactement ceux vérifiant $s(u) = -u$. Ces égalités devraient sembler évidentes si vous visualisez ce qu'on fait lorsqu'on effectue une symétrie (voir aussi le dessin un peu plus bas).

Démonstration. Il est une fois de plus facile de commencer par les dernières propriétés. La condition $s(u) = u$ correspond à $u = u_F \in F$, la condition $s(u) = -u$ correspond à $u = u_G \in G$, ce qui prouve le premier point. La supplémentarité des deux noyaux en découle. Quant à la dernière propriété, elle est immédiate : $(2p - \mathrm{id})(u) = 2u_F - u = u_F - u_G = s(u)$. Le fait que s vérifie

$s \circ s(u) = u$ est à peu près immédiat (si on veut s'amuser, on peut le prouver en utilisant la projection : $(2p - \mathrm{id})^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{id} = \mathrm{id}$ puisque $p^2 = p$ pour une projection), et la réciproque peut se prouver de façon similaire à ce qu'on a fait pour les projections.

Une méthode explicite pour prouver que $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires : si $u \in F \cap G$, alors $s(u) = u$ et $s(u) = -u$, $u = -u$ et $u = 0$; par ailleurs, $u = \dfrac{u + s(u)}{2} + \dfrac{u - s(u)}{2}$, le premier élément vérifie $s\left(\dfrac{u + s(u)}{2}\right) = \dfrac{s(u) + u}{2}$, donc il appartient à F ; le deuxième appartient de même à G. Enfin, $u_F - u_G = \dfrac{u + s(u)}{2} - \dfrac{u - s(u)}{2} = s(u)$, donc s est bien une symétrie. $\square$

Remarque 10. Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise est laissé fixe par s, et ce parallèlement à quoi on symétrise est envoyé sur son opposé, ce qui est bien le principe d'une symétrie « parallèlement à un sous-espace ». Comme dans les cas des projections, la notion de symétrie orthogonale n'aurait de toute façon aucun sens pour l'instant.



Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on cherche à déterminer une expression analytique de la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1))$ et parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 3); (1, 0, 0))$. Il faudrait déjà commencer par prouver que $F \oplus G = E$. comme nous avons de toute façon besoin de connaître la décomposition d'un vecteur dans $F \oplus G$ pour calculer son image par s, le calcul ne peut pas faire de mal. Considérons donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, er cherchons trois réels a, b et c tels que $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 0, 0)$. Il n'est même pas indispensable d'écrire entièrement le système : la deuxième coordonnée donne immédiatement $y = 2b$, soit $b = \dfrac{y}{2}$; puis la troisième donne $a + 3b = z$, soit $a = z - 3b = z - \dfrac{3}{2}y$, et enfin via la première coordonnée $x = a + b + c$, donc $c = x - a - b = x + y - z$. Finalement, le système admet toujours une solution unique, ce qui prouve la supplémentarité de F et de G. Par ailleurs, $s(x, y, z) = a(1, 0, 1) - b(1, 2, 3) - c(1, 0, 0) = \left(z - \dfrac{3}{2}y, 0, z - \dfrac{3}{2}y\right) - \left(\dfrac{1}{2}y, y, \dfrac{3}{2}y\right) - (x + y - z, 0, 0) = (-x - 3y + 2z, -y, z - 3y)$. On vérifie facilement que $s \circ s = \mathrm{id}$ avec cette expression.

Définition 7. Toujours avec les mêmes notations que dans les définitions précédentes, l'**affinité de rapport λ par rapport à F et parallèlement à G** est l'application linéaire $a_\lambda : x \mapsto x_F + \lambda x_G$.

Exemple : Je ne vais pas vraiment donner un exemple concret d'affinité (ça n'a pas grand intérêt), mais simplement signaler que les affinités dans le plan ont l'intéressante particularité de transformer les cercles (centrés en l'origine) en ellipses.

Remarque 11. Les projections et symétries sont des cas particuliers d'affinités, lorsque $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$ respectivement. On peut en fait voir une affinité comme une sorte d'hybride douteux entre l'identité et une homothétie. Si $\lambda \neq 0$, l'affinité est un automorphisme, dont la réciproque est l'affinité de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$. Notons aussi que, pour une affinité a, on a toujours $E = \ker(a - \mathrm{id}) \oplus \ker(a - \lambda\,\mathrm{id})$. Poussons d'ailleurs cette remarque un peu plus loin pour les plus motivés d'entre vous : les projecteurs sont des applications linéaires vérifiant $p^2 = p$, ou si on préfère $p^2 - p = 0$, soit encore $p \circ (p - \mathrm{id}) = 0$. Or, on a vu que, pour une projection, $E = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id})$ (puisque $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id})$). De même, une symétrie vérifie $s^2 - \mathrm{id} = 0$, soit $(s + \mathrm{id}) \circ (s - \mathrm{id}) = 0$, et on a par ailleurs $E = \ker(s + \mathrm{id}) \oplus \ker(s - \mathrm{id})$. On peut constater qu'une affinité vérifie quand à elle l'égalité $a_\lambda^2 = (\lambda + 1)a_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}$, soit $(a_\lambda - \mathrm{id}) \circ (a_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$, ce qui est cohérent avec le fait que $E = \ker(a_\lambda - \mathrm{id}) \oplus \ker(a_\lambda - \lambda\,\mathrm{id})$. Il y a sûrement des choses très profondes à généraliser à partir de ces constatations, mais ça nous dépasse un peu pour l'instant (déjà, pour être honnête, la notion d'affinité est hors programme).