TD n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 mars 2020

Exercice 1

1. Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - 2y + 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. En soustrayant les équations extrêmes on trouve $2y - t = 0$, soit $t = 2y$. On reporte alors dans la deuxième équation pour trouver $x + 2z = 0$, soit $x = -2z$. On remplace enfin tout ce qu'on peut dans la première équation : $-2z + y + z - 2y = 0$, donc $z = -y$, ce qui donne $x = 2y$, puis $(x, y, z, t) = (2y, y, -y, 2y)$, avec $y \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $F = \text{Vect}((2, 1, -1, 2))$ et en particulier F est un espace vectoriel de dimension 1.
2. On utilise les vecteurs de la base canonique pour compléter (en exploitant le théorème de la base incomplète) :
   (a) le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ n'étant manifestement pas colinéaire avec $(2, 1, -1, 2)$, la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0))$ est toujours libre.
   (b) le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a(2, 1, -1, 2) + b(1, 0, 0, 0)$ (les deux équations obtenues pour les deux coordonnées centrales seraient $a = 1$ et $-a = 0$, ce qui est difficilement compatible), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ est encore libre.
   (c) de même, le vecteur $(0, 0, 1, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des trois précédents (sinon, avec des notations similaires, on aurait $2a + b = 0$, $a + c = 0$, $-a = 1$ et $2a = 0$, et les deux dernières équations sont incompatibles), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ est libre, et forme donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'elle est consituée de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4.
3. Partons donc d'une combinaison linéaire annulant ces trois vecteurs : $a(1, 1, -1, 1) + b(-1, -2, 3, 7) + c(4, 4, -5, -3) = 0$. On est donc ramenés à la résolution du système $\begin{cases} a - b + 4c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \\ -a + 3b - 5c = 0 \\ a + 7b - 3c = 0 \end{cases}$.
   L'opération $L_1 - L_2$ donne immédiatement $b = 0$, et on a alors $a + 4c = -a - 5c = 0$, ce qui implique $c = 0$ puis $a = 0$. La seule solution du système est donc la solution triviale, la famille est donc libre. Comme elle est génératrice de G et constituée de trois vecteurs, on en déduit que $\dim(G) = 3$.
4. Chacun des vecteurs de la base de G étudiée à la question précédente vérifie l'équation de H : $2+6-7-1 = -2-12+21-7 = 8+24-35+3 = 0$, donc ces trois vecteurs appartiennent à H, et leurs combinaisons linéaires également (H étant défini par une équation linéaire homogène, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$). On a donc nécessairement $G \subset H$. Or, on peut écrire, en « résolvant » l'équation le définissant, que $H = \text{Vect}((1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, 6); (0, 0, 1, 7))$, et en déduire que H est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Si $G \subset H$ et que les deux espaces ont la même dimension, on a nécessairement $H = G$.

5. On sait déjà que $\dim(F)+\dim(G)=1+3=4=\dim(\mathbb{R}^4)$. De plus, le vecteur $(2,1,-1,2)$ ne vérifie pas l'équation de H : $4+6-7-2\neq 0$, donc $(2,1,-1,2)\notin G$ (on a vu précédemment que $G=H$) et ses multiples n'appartiennent pas non plus à G, ce qui suffit à prouver que $F\cap G=\{0\}$. Cei suffit à prouver que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
6. Plutôt que de prendre la famille donnée dans l'énoncé comme base de G, on prendra (c'est plus facile pour les calculs) la base de H (et donc de G) obtenue ensuite. On cherche donc à écrire u sous la forme $v+w$, avec $v=a(2,1,-1,2)\in F$, et $w=b(1,0,0,2)+c(0,1,0,6)+d(0,0,1,7)\in G$. Celà revient à résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2a & + & b & & & & & = & x \\ a & & & + & c & & & = & y \\ -a & & & & & + & d & = & z \\ 2a & + & 2b & + & 6c & + & 7d & = & t \end{array}\right.$. On en déduit que $b=x-2a$; $c=y-a$ et $d=z+a$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a+2x-4a+6y-6a+7z+7a=t$, soit $a=2x+6y+7z-t$, dont on déduit ensuite $b=-3x-12y-14z+2t$; $c=-2x-5y-7z+t$ et $d=2x+6y+8z-t$. Autrement dit, on a $v=(4x+12y+14z-2t, 2x+6y+7z-t, -2x-6y-7z+t, 4x+12y+14z-2t)$, et $w=(-3x-12y-14z+2t, -2x-5y-7z+t, 2x+6y+8z-t, -4x-12y-14z+3t)$.

Exercice 2

1. Allons-y pour la vérification :
   - F est non vide puisqu'il contient (entre autres) la matrice nulle, mais aussi la matrice identité ou même A elle-même.
   - F est stable par produit extérieure : si $AM=MA$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $A(\lambda M)=\lambda AM=\lambda MA$.
   - F est stable par somme : si $AM=MA$ et $AN=NA$, alors $A(M+N)=AM+AN=MA+NA=(M+N)A$.

   Notre ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Posons brutalement $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AM=\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}$, et $MA=\begin{pmatrix} a+2b & 3a-b \\ c+2d & 3c-d \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont donc égales si $\left\{\begin{array}{rcl} 3c-2b & = & 0 \\ 2b+3d-3a & = & 0 \\ 2a-2c-2d & = & 0 \\ 2b-3c & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont identiques et donnent $b=\dfrac{3}{2}c$. En remplaçant dans la deuxième équation, celle-ci devient alors équivalente à la troisième : $a-c-d=0$, soit $a=c+d$. On ne peut pas faire mieux que garder les deux inconnues c et d variant dans $\mathbb{R}$, donc les matrices appartenant à F sont de la forme $\begin{pmatrix} c+d & \frac{3}{2}c \\ c & d \end{pmatrix}$. Autrement dit, $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices formant la famille génératrice de F étant manifestement non proportionnelles, elle forment une base de F, qui est donc de dimension 2.
3. On sait déjà que I (qui est d'ailleurs l'une des deux matrices formant la base de F obtenue à la question précédente) et A (qui commute de façon triviale avec elle-même) appartiennent à F. Comme il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires (c'est évident) dans un espace de dimension 2, la famille (I,A) est nécessairement une base de F. C'est exactement le même raisonnement pour (A,A^2), en constatant que $A^2=7I$ (calcul immédiat).
4. Notons $N=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, même pas la peine de calculer AN et NA pour prouver que $N\in F$, il suffit de constater que $N=A-3I$. Étant combinaison linéaire de matrices de F,

N est elle-même dans F et admet pour coordonnées $(-3, 1)$ dans la base (I, A). Bien sûr, on a donc $N = A - \frac{3}{7}A^2$, donc N a pour coordonnées $\left(1, -\frac{3}{7}\right)$ dans la base (A, A^2).

Exercice 3

1. Puisque $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, on peut écrire que $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. Un équivalent classique permet alors d'affirmer que $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \sim -\frac{x^2}{6}$. Il ne reste plus qu'à diviser par x^2 pour obtenir $\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \sim -\frac{1}{6}$, la limite recherchée vaut donc $-\frac{1}{6}$.
2. La fonction arcsin est définie au voisinage de 0, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, elle admet donc en 0 un développement limité de la forme $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. On sait par ailleurs que $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, et bien entendu que $\arcsin(\sin(x)) = x$. En composant les deux développements, on doit donc avoir $x = a\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) + b\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^3 + c\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5 = ax - \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{120}x^5 + bx^3 - \frac{b}{2}x^5 + cx^5 + o(x^5) = ax + \left(b - \frac{a}{6}\right)x^3 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{120}\right)x^5 + o(x^5)$. L'unicité de la partie régulière du développement limité (en l'occurrence de la fonction identité) assure alors que $a = 1$; $b - \frac{a}{6} = 0$ donc $b = \frac{1}{6}$; et $c - \frac{b}{2} + \frac{a}{120} = 0$ donc $c = \frac{1}{12} - \frac{1}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$. On retrouve donc le résultat bien connu $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$.
3. On peut aisément constater que la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, et on pose comme d'habitude $X = \frac{1}{x}$ pour avoir une variable qui tend vers 0. On calcule alors $f(x) = \frac{1}{X}\sqrt{\frac{\frac{1}{X} - 3}{\frac{1}{X} + 1}} = \frac{1}{X}\sqrt{\frac{1 - 3X}{1 + X}}$. On peut alors écrire $\frac{1 - 3X}{1 + X} = (1 - 3X)(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) = 1 - X + X^2 - X^3 - 3X + 3X^2 - 3X^3 + o(X^3) = 1 - 4X + 4X^2 - 4X^3 + o(X^3)$. En posant $u = -4X + 4X^2 - 4X^3$, on développe alors $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$, soit $\sqrt{\frac{1 - 3X}{1 + X}} = 1 - 2X + 2X^2 - 2X^3 - 2X^2 + 4X^3 - 4X^3 + o(X^3) = 1 - 2X - 2X^3 + o(X^3)$. Autrement dit, $f(x) = \frac{1}{X} - 2 - 2X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x - 2 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On en déduit successivement :
   - $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f(x) - (x - 2) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{x^2}$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
   - De plus $f(x) - (x - 2)$ est équivalent à une expression négative, donc sera négatif au voisinage de $+\infty$, et la courbe sera donc en-dessous de son asymptote sur ce voisinage.
4. On écrit bien sûr l'expression à développer sous la forme $e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)}$. En anticipant la division par x, on va développer à l'ordre 4 : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, donc $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ en posant $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, ce qui permet de calculer

$\dfrac{1}{\cos(x)} = 1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4) = 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^4)$. On passe tout ça dans le ln, en utilisant à nouveau une composée (que je ne rédige pas complètement) : $\ln\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4) = \dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)$. On en déduit que ce qui se trouve dans l'exponentielle initiale a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 l'expression $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$. Cette expression tendant vers 0, on peut en faire le développement à l'intérieur de l'exponentielle : $\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{5}{48}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 4

1. On calcule bien sûr directement $I_0 = \displaystyle\int_0^2 e^x\ dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$.

   Ensuite, on va avoir besoin d'une IPP pour calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^2 (2-x)e^x\ dx$. On pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = 2-x$ pour obtenir $v'(x) = -1$. On a donc $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 + \displaystyle\int_0^1 e^x\ dx = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$.

   Enfin, pour I_2, on procède de même : $I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 (2-x)^2 e^x\ dx$. On pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = (2-x)^2$ pour obtenir $v'(x) = -2(2-x)$. On a donc $I_1 = \dfrac{1}{2}[(2-x)^2e^x]_0^2 + \displaystyle\int_0^1 (2-x)e^x\ dx = -2 + I_1 = e^2 - 5$.
2. On l'obtient par la même IPP que précédemment, en posant toujours $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = \dfrac{(2-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $v'(x) = -\dfrac{(2-x)^n}{n!}$ (on peut simplifier un facteur $n+1$). On trouve alors $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}[(2-x)^{n+1}e^x]_0^2 + I_n$, soit $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. Lorsque $x \in [0,2]$, on peut écrire que $0 \leqslant (2-x) \leqslant 2$, donc $0 \leqslant (2-x)^n \leqslant 2^n$, et $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^2 \frac{2^n}{n!}e^x\ dx = \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$. Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. Au rang 0, on a $\dfrac{2^0}{0!} + I_0 = 1 + e^2 - 1 = e^2$ donc la propriété est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2^k}{k!} + I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2$ par hypothèse de récurrence. La formule est donc vrai pour tout entier naturel n.
5. Puisque I_n tend vers 0, il suffit de passer à la limite dans la relation précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!} = e^2$.

Exercice 5

1. Posons $f(x) = \tan(x) - x$, la fonction f est définie et dérivable sur chacun des intervalles de la forme $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ étant toujours positive, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles, et a des limites infinies aux bornes de l'intervalle, donc elle est bijective de $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun des intervalles étudiés. Comme par ailleurs $f(n\pi) = -n\pi < 0$, cette solution se trouve nécessairement dans l'intervalle $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. L'inégalité $u_n \geqslant n\pi$ prouve bien sûr immédiatement que $\lim u_n = +\infty$.

2. Puisque $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$, $u_n - n\pi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et on a donc $\arctan(\tan(u_n - n\pi)) = u_n - n\pi$, et donc $\arctan(\tan(u_n)) = u_n - n\pi$ par périodicité de la fonction tangente. Autrement dit, $v_n = \arctan(\tan(u_n)) = \arctan(u_n)$ puisque par définition $u_n = \tan(u_n)$. La relation rappelée dans l'énoncé permet alors de conclure que $v_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

3. On sait déjà que $\lim u_n = +\infty$, donc $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$, de même avec l'arctangente, et $\lim v_n = \dfrac{\pi}{2}$. Comme par définition $u_n = v_n + n\pi$, on peut écrire $v_n = \dfrac{\pi}{2} + o(1)$ puis $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)$ (vous en profiterez pour réfléchir à ce que signifie graphiquement ce début de développement, et vous comprendrez alors que c'est essentiellement évident).

4. Attention à bien écrire des développements d'expressions qui tendent vers 0 : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \dfrac{1}{n\pi} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2n^2\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme on connait en 0 le développement de $\arctan(u) = u + o(u^2)$, on peut directement en déduire que $\arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2n^2\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $v_n = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et enfin $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

5. On recommence : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n\pi} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi^2 n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$
$= \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{\pi^2 n^2} - \dfrac{1}{2\pi^2 n^3} + \dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{\pi^2 n^3} - \dfrac{1}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$= \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + \dfrac{1}{4n^2} + \dfrac{1}{\pi^2 n^2} - \dfrac{1}{8n^3} - \dfrac{1}{3\pi^2 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

On met tout ça dans l'arctangente en prenant en compte le terme suivant en $-\dfrac{1}{3}u^3$:
$\arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + \dfrac{1}{4n^2} + \dfrac{1}{\pi^2 n^2} - \dfrac{1}{8n^3} - \dfrac{1}{3\pi^2 n^3} - \dfrac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
Et on conclut : $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2\pi n^2} - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi^2}\right)\dfrac{1}{n^2} + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{3\pi^2} - \dfrac{1}{3\pi^3}\right)\dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.