TD n$^{\text{o}}$ 7 (révisions sur les espaces vectoriels et les développements limités)

PTSI B Lycée Eiffel

20 mars 2020

Exercice 1

On définit dans $E = \mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z-t = x-2y+2z+t = x-y+z = 0\}$; $G = \text{Vect}((1, 1, -1, 1); (-1, -2, 3, 7); (4, 4, -5, -3))$.

1. Déterminer une base de F et préciser la dimension de ce sous-espace vectoriel.
2. Compléter la base obtenue pour F en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. La famille $((1, 1, -1, 1); (-1, -2, 3, 7); (4, 4, -5, -3))$ est-elle une famille libre de vecteurs de E ? En déduire la dimension de G.
4. On note $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 6y + 7z - t = 0\}$. Vérifier que $H = G$.
5. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
6. Soit $u(x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de E. Exprimer u comme somme de deux vecteurs v et w appartenant respectivement à F et à G.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A une matrice fixée appartenant à $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer (en revenant à la définition) que $F = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F.
3. Montrer que la famille (I, A) est une base de F. Vérifier que la famille (I, A^2) est aussi une base de F.
4. Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à F et déterminer ses coordonnées dans chacune des deux bases évoquées à la question précédente.

Exercice 3

Les quatre questions sont indépendantes :

1. Calculer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.
2. Retrouver le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction arcsin en exploitant le fait qu'elle est réciproque de la fonction sin (et qu'on connait le DL de cette dernière, bien entendu).

3. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ (limite, présence d'une éventuelle asymptote oblique, et position relative de la courbe par rapport à cette asymptote).
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 4

On définit pour tout entier naturel n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer plus généralement une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Montrer que, pour tout entier n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}(e^2-1)$, et en déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).
4. Montrer par récurrence que $e^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.

Exercice 5

On cherche dans cet exercice à obtenir un développement asymptotique d'une suite de réels (u_n) solutions de l'équation $\tan(u_n) = u_n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. On notera u_n cette solution. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier que $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. On pose $v_n = u_n - n\pi$. Montrer rigoureusement que $v_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ (on pourra exploiter sans la démontrer la relation $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$).
3. Déterminer la limite de la suite (v_n), et en déduire un développement asymptotique de u_n de la forme $u_n = n\pi + k + o(1)$, avec $k \in \mathbb{R}$.
4. Calculer un développement asymptotique de $\dfrac{1}{u_n}$ à l'ordre $\dfrac{1}{n^2}$, et en déduire les développements asymptotiques de v_n puis de u_n à ce même ordre.
5. En adaptant la méthode exploitée à la question précédente, obtenir un développement asymptotique de u_n à l'ordre $\dfrac{1}{n^4}$.