TD n^o 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2020

Exercice 1

1. (a) Dans cette question, les répétitions sont possibles et l'ordre important. On va donc utiliser des listes, et plus précisément des 4-listes dans un ensemble à 20 éléments, ce qui nous donne 20^4 tirages possibles.

   (b) Il y a trois façons possibles de tirer un jeton 2, six façons de tirer un 0 etc. Il suffit de multiplier tout ça pour obtenir $3 \times 6 \times 4 \times 5$ tirages donnant 2019.

   (c) On tire donc deux fois un 9, ce qui fait déjà 5^2 possibilités (on utilise toujours des listes, bien entendu), et deux chiffres qui ne sont pas des 9, ce qui fait pour le coup 15^2 possibilités puisqu'il y a $20 - 5 = 15$ jetons qui ne portent pas le chiffre 9. Il reste à choisir la position des deux 9 parmi les quatre tirages, ce qui donne $5^2 \times 15^2 \times \binom{4}{2}$ tirages possibles.

   (d) Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Parmi les chiffres qu'on peut tirer, le 9, le 6 et le 0, qui sont divisibles par 3, jouent exactement le même rôle. Il y a donc 13 jetons « divisibles par trois » dans l'urne. Les possibilités pour que notre nombre soit divisible par trois sont les suivantes :
   - on tire quatre jetons divisibles par 3, ce qui fait 13^4 possibilités.
   - on tire deux jetons divisibles par 3, un jeton 1 et un jeton 2, ce qui fait $13^2 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3$ (le deuxième facteur 4 pour la position du 1 parmi les tirages, et le deuxième facteur 3 pour la position du 2).
   - on tire un seul jeton divisible par 3, et on complète au choix par trois jetons 1 ou trois jetons 2, ce qui correspond à $13 \times 4^3 \times 4 + 13 \times 3^3 \times 4$ tirages (le dernier facteur 4 étant à chaque fois le choix de la position du nombre divisible par 3).
   - on ne tire aucun jeton divisible par 3, il faut alors tirer deux 1 et deux 2, ce qui fait $4^2 \times 3^2 \times \binom{4}{2}$ tirages (même raisonnement qu'à la question *c*).

   Il ne reste plus qu'à additionner tout ça (ce que je ne réécrirai pas, ça n'a aucun intérêt).

2. (a) Les répétitions ne sont plus possibles, et l'ordre n'a plus d'importance (puisque les tirages sont simultanés), on va utiliser des combinaisons. Il y a maintenant $\binom{20}{4}$ tirages possibles.

   (b) C'est en fait la même réponse qu'avec les tirages successifs ! En effet, il faut choisir un chiffre 2, un chiffre 0, un chiffre 1 et un chiffre 9, ce qui donne exactement le même produit (mais pas la même probabilité, bien entendu, puisqu'il y a désormais beaucoup moins de tirages possibles).

   (c) On a simplement $\binom{5}{2} \times \binom{15}{2}$ tirages (on choisit les deux 9, et les deux autres chiffres).

   (d) Par le même raisonnement que plus haut, on trouve $\binom{13}{4} + \binom{13}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{13}{1}\binom{4}{3} + \binom{13}{1}\binom{3}{3} + \binom{4}{2}\binom{3}{2}$ (certaines expressions peuvent se simplifier, mais autant les laisser sous leur forme naturelle pour mieux suivre le raisonnement).

Exercice 2

1. Par définition, u_1 est solution positive de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet donc pour solutions $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ (on oublie donc) et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $u_1 > 0$, on a donc $u_1 = 1 + \sqrt{2}$.

2. La fonction f_n étant polynômiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$. Comme $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = n - (n+1) = -1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
					$+\infty$
f_n	0	$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		

La fonction f_n ne prend que des valeurs négatives sur l'intervalle $[0, 1]$, l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut pas y avoir de solution. Sur $[1, +\infty[$, f_n est croissante et continue, donc bijective vers son intervalle image $[-1, +\infty[$. Comme 1 appartient à cet intervalle image, l'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une unique solution sur $[1, +\infty[$, et par conséquent sur $[0, +\infty[$.

3. Pour montrer un tel encadrement, on calcule les images des encadrants par f_n : $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = 0$; et $f_n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = n\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = (n+2)\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n - (n+1)\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n > 1$. Comme $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1 < f_n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$, la croissance de f_n sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (intervalle auquel appartiennent $1 + \dfrac{1}{n}$, u_n et $1 + \dfrac{2}{n}$) assure que $1 + \dfrac{1}{n} < u_n < 1 + \dfrac{2}{n}$. Le théorème des gendarmes permet alors de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

4. On commence par écrire $v_n = e^{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})}$ pour se rendre compte qu'il y a une forme indéterminée si jamais ça ne nous frappe pas sous la forme initiale. On peut ensuite poser $x = \dfrac{\beta}{n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\beta}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite classique issue d'un taux d'accroissement), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})}{\beta} = 1$. Ce qui se trouve dans notre exponentielle a donc pour limite β, et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e^\beta$.

5. On écrit $f_n\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right) = n\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)^n = (n + \beta)\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)^n - (n+1)\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)^n = (\beta - 1)v_n$. D'après la question précédente, notre suite converge donc vers $(\beta - 1)e^\beta$.

6. Posons donc $g(x) = (x-1)e^x$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$. Cette dérivée est du signe de x, on calule donc $g(0) = -e^0 = -1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée classique), et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, pour dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
					$+\infty$
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		

On conclut comme à la question 2 : la fonction g ne peut pas prendre la valeur 1 sur $]-\infty,0]$, puis elle est bijective de $[0,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$, donc l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution. Comme de plus $g(1)=0<1$ et $g(2)=e^2>1$, la croissance de g sur $[0,+\infty[$ assure que $1<\alpha<2$.

7. (a) Il suffit de recopier le résultat de la question 4 : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n}\right)=(\alpha-\varepsilon-1)e^{\alpha-\varepsilon}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1+\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}\right)=(\alpha+\varepsilon-1)e^{\alpha+\varepsilon}$.

   (b) Par hypothèse, $1<\alpha-\varepsilon<\alpha<\alpha+\varepsilon$, donc $g(\alpha-\varepsilon)<g(\alpha)<g(\alpha+\varepsilon)$ (par croissance de la fonction g étudiée plus haut sur $[1,+\infty[$). On en déduit que les deux limites calculées à la question précédente sont respectivement strictement inférieure à 1 et strictement supérieure à 1. Mais, en appliquant la définition de la limite, une suite qui a une limite strictement inférieure à 1 prend nécessairement des valeurs inférieures ou égales à 1 à partir d'un certain rang (on note cette limite $1-\eta$, avec $\eta>0$, et on applique la définition de la limite à ce η). À partir d'un certain rang, on aura donc nécessairement $f_n\left(1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n}\right)\leqslant 1=f_n(u_n)$, ce qui implique $1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n}\leqslant u_n$ par croissance de f_n sur $[1,+\infty[$, intervalle auquel appartiennent bien nos deux valeurs. On montre la deuxième inégalité de la même façon, et on en déduit un entier n_0 (le maximum des deux entiers obtenus pour chaque inégalité) à partir duquel l'encadrement souhaité sera vérifié.

   (c) On constate déjà que $1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n}\leqslant u_n\leqslant 1+\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n}\leqslant u_n-1\leqslant\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}\Leftrightarrow\alpha-\varepsilon\leqslant n(u_n-1)\leqslant\alpha+\varepsilon$. D'après la question précédente, on peut alors dire que, $\forall\varepsilon\in]0,\alpha-1[$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqslant n_0$, $\alpha-\varepsilon\leqslant n(u_n-1)\leqslant\alpha+\varepsilon$. C'est exactement la définition de la limite, qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n-1)=\alpha$.

Exercice 3

1. On calcule donc $M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-6&7&-6\\-3&3&2\end{pmatrix}$. On constate en passant que $M^2=-M+2I$ mais ce n'est pas ce qui est demandé. Passons donc à $M^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\18&-17&18\\9&-9&10\end{pmatrix}$. Cette fois-ci on obtient la relation $M^3=3M-2I$ (on commence par constater que les coefficients hors de la diagonale sont tous multipliés par 3 lors du passage de M à M^3, puis on regarde ce qui se passe sur la diagonale pour obtenir le coefficient devant I dans la relation).

2. On peut donc écrire $3M-M^3=2I$, soit $M\left(\dfrac{3}{2}I-\dfrac{1}{2}M^2\right)=I$. La matrice M est donc inversible, d'inverse $\dfrac{3}{2}I-\dfrac{1}{2}M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-2&3\\\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

3. Nous allons procéder par récurrence. Au rang 0, $M^0=I$, qui est bien de la forme souhaitée en posant simplement $u_0=0$. Supposons maintenant la propriétée vérifiée pour M^n,

et calculons alors $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4u_n & -5+4u_n & 6-4u_n \\ 3-2u_n & -3+2u_n & 4-2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(3-2u_n) & 1-2(3-2u_n) & 2(3-2u_n) \\ 3-2u_n & -3+2u_n & 1+(3-2u_n) \end{pmatrix}$, qui est bien de la forme souhaitée en posant $u_{n+1} = 3 - 2u_n$. La récurrence fonctionne donc, et la proriété est prouvée pour tout entier naturel n.

4. Puisqu'on a obtenu la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 - 2u_n$, la suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 3 - 2x$, qui a pour solution $x = -1$. On pose donc $v_n = u_n - 1$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2 - 2u_n = -2v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -1$, donc $v_n = -(-2)^n$, puis $u_n = 1 + v_n = 1 - (-2)^n$. On en déduit que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & -1-(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}$.

5. Si on applique la formule précédente avec $n = -1$, donc $(-2)^n = -\frac{1}{2}$ et $(-2)^{n+1} = (-2)^0 = 1$, on trouve $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, ce qui est bien la valeur de l'inverse calculée plus haut.

6. Pour une fois, effectuons directement le calcul matriciellement :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15 & 10 & -15 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2/5 \\ L_2 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

On retrouve bien sûr une fois de plus la même matrice inverse.

Exercice 4

1. On calcule donc $u_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$, $v_1 = u_1 = 2$ et $w_1 = 0 + 1 = 1$.
Puis $u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$, $v_2 + 2u_2 = 5$ et $w_2 = 0 + \frac{2}{2} + 2 \times 2 = 5$.
Enfin, $u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}$, $v_3 = 6u_3 = 16$ et $w_3 = 0 + \frac{6}{3} + 2 \times \frac{6}{3} + 3 \times 6 = 24$.

2. En exploitant la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on se rend compte qu'en remplaçant k par $n-k$ dans la somme, les deux expressions sont effectivement égales (on se contente en fait d'effectuer la somme en sens inverse). On a donc, en développant, $w_n = \sum_{k=0}^{n} n\frac{n!}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{\binom{n}{k}} = n \times n!u_n - w_n$, soit $2w_n = nv_n$ et donc $w_n = \frac{nv_n}{2}$.

3. On sait déjà que $w_n = \frac{n}{2}v_n = \frac{n \times n!}{2}u_n$. Effectuons par ailleurs un calcul astucieux : $w_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\frac{n!}{\binom{n}{k}}$ (on applique une bonne vieille astuce belge). En séparant le facteur en $k+1$ et -1, on trouve alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)n!}{\binom{n}{k}} - n!u_n$. Or, on peut écrire que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ (c'est une variante de la formule sans nom), donc $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1) \times n!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = (n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - n!u_n$. On reconnait presque dans la première somme la valeur de u_{n+1}, il ne manque que le terme numéro 0. Autrement dit, on a $w_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$, donc $\frac{nn!}{2}u_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$. On divise tout par $n!$: $\frac{n}{2}u_n = (n+1)(u_{n+1}-1) - u_n$, soit $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n}{n+1} + \frac{nu_n}{2n+2} = \frac{(n+2)u_n}{2n+2}$. C'est exactement la relation demandée.

4. On peut calculer $u_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}$, et en déduire à l'aide de la relation précédente que $u_5 = 1 + \frac{6}{10}u_4 = 1 + \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$. Ensuite, $u_6 = 1 + \frac{7}{12}u_5 = 1 + \frac{91}{60} = \frac{151}{60}$, et enfin $u_7 = 1 + \frac{8}{15}u_6 = 1 + \frac{4}{7} \times \frac{151}{60} = 1 + \frac{151}{105} = \frac{256}{105}$. Passionnant.

5. C'est un calcul tout bête exploitant la question 2 : $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}u_{n+1}}{n+2} = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+2}{2n+2}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^{n+1}}{2(n+1)}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^n}{n+1}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + t_n$.

6. On procède par exemple par récurrence, en prouvant plus simplement que $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$. Au rang 0, le membre de droite de la relation vaut 1 (un seul terme dans la somme égal à 1), ce qui est bien la valeur de t_0. Supposons la relation vraie au rang n, alors $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2} + t_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 5

1. Calculons donc $A_sA_t = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{t} & t-s \\ \frac{1}{t} - \frac{1}{s} & 1 - \frac{t}{s} \end{pmatrix}$. De même, on aura bien entendu $A_tA_s = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{s} & s-t \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{t} & 1 - \frac{s}{t} \end{pmatrix}$. Pour que ces deux matrices soient égales, on doit déjà avoir $t - s = s - t$, donc $s = t$, et dans ce cas les autres coefficients sont manifestement égaux. Les matrices commutent donc si et seulement si $s = t$.

2. Calculons $A_s + A_t = \begin{pmatrix} 2 & s+t \\ -\frac{1}{s} - \frac{1}{t} & -2 \end{pmatrix}$, puis $(A_s + A_t)^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{s}{t} - \frac{t}{s} & 0 \\ 0 & 2 - \frac{t}{s} - \frac{s}{t} \end{pmatrix}$. On peut ensuite constater que $2 - \frac{s}{t} - \frac{t}{s} = \frac{2st - s^2 - t^2}{st} = -\frac{(s-t)^2}{st}$, donc $(A_s + A_t)^2 =$

$-\dfrac{(s-t)^2}{st}I$. L'égalité demandée par l'énoncé en découle immédiatement en élevant simplement tout à la puissance n.

3. On applique le résultat de la question précédente avec $s = 2t$: $(A_t + A_{2t})^{2k} = (-1)^k \dfrac{t^{2k}}{(2t^2)^k} I = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k I$ (mais oui, les puissances de t se simplifient !). On en déduit que $M_n = \sum_{k=1}^{n} (A_t + A_{2t})^{2k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right) I = \left(\dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}{1 + \frac{1}{2}} - 1\right) I = \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) I$. Quand n tend vers $+\infty$, même pas besoin d'écrire explicitement la matrice pour se rendre compte que cette expression a pour limite $-\dfrac{1}{3}I$.

4. Deux possibilités principales : récurrence ou décomposition en éléments simples. Si on choisit la décomposition, on peut même éviter le calcul en écrivant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, donc $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (somme télescopique).

   Pour ceux qui préfèrent la récurrence, on initialise au rang 1 : $\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{1+1}$, ça marche. On suppose ensuite l'égalité vérifiée au rang n, et on écrit $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \dfrac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$, ce qui est bien la formule souhaitée au rang $n+1$.

5. On utilise encore la résultat de la question 2 (avec $n = 1$) pour simplifier $(A_k + A_{k+1})^2 = -\dfrac{(-1)^2}{k(k+1)} I = -\dfrac{1}{k(k+1)} I$. On en déduit immédiatement que $P_n = \sum_{k=1}^{n} (A_k + A_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^{n} -\dfrac{1}{k(k+1)} I = \left(\dfrac{1}{n+1} - 1\right) I$ en exploitant la question précédente. En core une fois la limite est triviale, égale à $-I$.