TD n^o 5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2019

Exercice 0 (mise en jambes)

1. Le plus simple est de commencer par constater que $z = -1$ est une racine évidente de notre polynôme : $-1 + 3i - 3 + 3 + 4i + 1 - 7i = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de notre équation sous la forme $z^3 + (3i-3)z^2 - (3+4i)z + 1 - 7i = (z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$, puis $a + b = 3i - 3$ dont on déduit $b = 3i - 4$, et $b + c = -3 - 4i$ dont on déduit $c = 1 - 7i$, ce qui est cohérent avec la dernière équation donnée par le coefficient constant. Résolvons maintenant l'équation du second degré $z^2 + (3i-4)z + 1 - 7i = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = (3i-4)^2 - 4(1-7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$. On cherche les racines carrées de ce discriminant sous la forme $\delta = a + ib$. On doit avoir $\delta^2 = \Delta$, donc $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$ en séparant parties réelle et imaginaire. De plus, l'égalité des modules donnes $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. En ajoutant cette équation à la première obtenue, on trouve $2a^2 = 8$, donc $a = \pm 2$. En la soustrayant à cette même équation, on trouve $2b^2 = 2$, donc $b = \pm 1$. La condition $2ab = 4$ imposant que a et b soient de même signe, on peut par exemple prendre $\delta = 2 + i$. Les deux solutions de notre équation du second degré sont donc $z_1 = \dfrac{3i-4+2+i}{2} = -1 + 2i$, et $z_2 = \dfrac{3i-4-2-i}{2} = -3 + i$. En revenant à l'équation initiale, on a donc $\mathcal{S} = \{-1; -1+2i; -3+i\}$.
2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = -2x + 6$ admet pour solution $x = 2$. On définit donc la suite auxiliaire (v_n) par $v_n = u_n - 2$ et on vérifie qu'elle est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -2u_n + 4 = -2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 1$, donc $v_n = (-2)^n$, et $u_n = v_n + 2 = 2 + (-2)^n$.
3. Commençons donc par linéariser le produit à l'aide des formules d'Euler : $\cos^3(x)\sin(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \times \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \dfrac{(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{ix} - e^{-ix})}{16i}$
$= \dfrac{e^{4ix} + 2e^{i2x} - 2e^{-2ix} - e^{-4ix}}{16i} = \dfrac{1}{8}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$. On peut maintenant calculer notre intégrale sans problème : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x)\sin(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\,dx$
$= \left[-\dfrac{1}{32}\cos(4x) - \dfrac{1}{8}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{64}$.

Exercice 1

1. Calculons donc $f(i) = \left|1 - i - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, on peut déjà signaler que $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \left|1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \left|\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{16}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

2. Un module étant toujours positif, l'inégalité $f(z) \geqslant 0$ est immédiate. Pour l'autre, on peut simplement appliquzr l'inégalité triangulaire : $f(z) \leqslant |1| + |z| + \frac{|z|^2}{2} = \frac{5}{2}$.
3. Si z est de module 1, on a $a^2 + b^2 = 1$. On peut alors écrire $z = a^2 - b^2 + 2iab$, soit $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2 = a^2 - (1 - a^2) = 2a^2 - 1$.
4. En posant bêtement $z = a+b$, on a $f(z)^2 = \left|1 - a - ib + \frac{1}{2}((2a^2 - 1)) + iab\right|^2 = \left(\frac{1}{2} - a + a^2\right)^2 + b^2(a-1)^2 = \frac{1}{4} + a^2 + a^4 - a + a^2 - 2a^3 + (1 - a^2)(a^2 - 2a + 1) = a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + \frac{1}{4} + a^2 - 2a + 1 - a^4 + 2a^3 - a^2 = 2a^2 - 3a + \frac{5}{4}$. On va donc poser $P(a) = 2a^2 - 3a + \frac{5}{4}$.
5. Le polynôme P admet pour dérivée $P'(a) = 4a - 3$, qui s'annule pour $a = \frac{3}{4}$. Notre polynôme est donc décroissant sur $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$ et croissant sur $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. En particulier, il admet pour minimum $P\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$. De plus, $P(-1) = 2 + 3 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$, et $P(1) = 2 - 3 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$, donc le maximum atteint par P sur l'intervalle $[-1, 1]$ est $\frac{25}{4}$.
6. Par définition, $f(z) = \sqrt{P(a)}$, pour une valeur de a comprise entre -1 et 1, puisqu'un nombre complexe de module 1 a une partie réelle qui est forcément comprise entre -1 et 1. On en déduit, en exploitant les résultats de la question précédente, que $\frac{1}{8} \leqslant f(z)^2 \leqslant \frac{25}{4}$, donc que $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant f(z) \leqslant \frac{5}{2}$. La borne supérieure est atteinte lorsque $z = -1$, la borne inférieure lorsque $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{4}$, donc $\mathrm{Im}(z)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. Il y a deux valeurs qui collent : $z = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 2

1. Calculons donc : $v_0 = \frac{3}{2}$; $u_1 = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}$; $v_1 = \frac{12}{7}$; $u_2 = \frac{\frac{7}{4} + \frac{12}{7}}{2} = \frac{49 + 48}{56} = \frac{97}{56}$. Poussons même jusqu'à $v_2 = \frac{168}{97}$ puisqu'on nous en demande une valeur approchée. Pour l'obtenir, on pose tout bêtement la division euclidienne : $168 = 97 + 71$, puis $710 = 97 \times 7 + 31$, et $310 = 97 \times 3 + 19$, donc $v_2 \simeq 1.73$. C'est une valeur approchée par défaut, comme toujours quand on arrête une division euclidienne après quelques étapes.
2. On va prouver par une récurrence simultanée que u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. C'est bien entendu vérifié au rang 0 vu les valeurs calculées plus haut. Supposons donc que ce soit le cas au rang n, on a alors $3 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4$ en additionnant simplement les encadrements, donc $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ comme souhaité. De plus, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{3}$ (tout est positif, pas de problème pour passer à l'inverse en changeant le sens des inégalités), donc $\frac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$, et notre propriété reste donc vérifiée au rang $n + 1$, ce qui achève notre récurrence.
3. Calculons donc $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{6}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 12}{2(u_n + v_n)}$. Or, par définition, $u_n v_n = 3$, donc $(u_n + v_n)^2 = (u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n = u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n = (u_n - v_n)^2$, ce qui donne bien la formule demandée par l'énoncé. Comme numérateur et dénominateur de cette fraction sont tous deux positifs, on en déduit que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$, ce qui prouve l'inégalité $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, le cas particulier $n = 0$ découlant des valeurs initiales calculées plus haut.

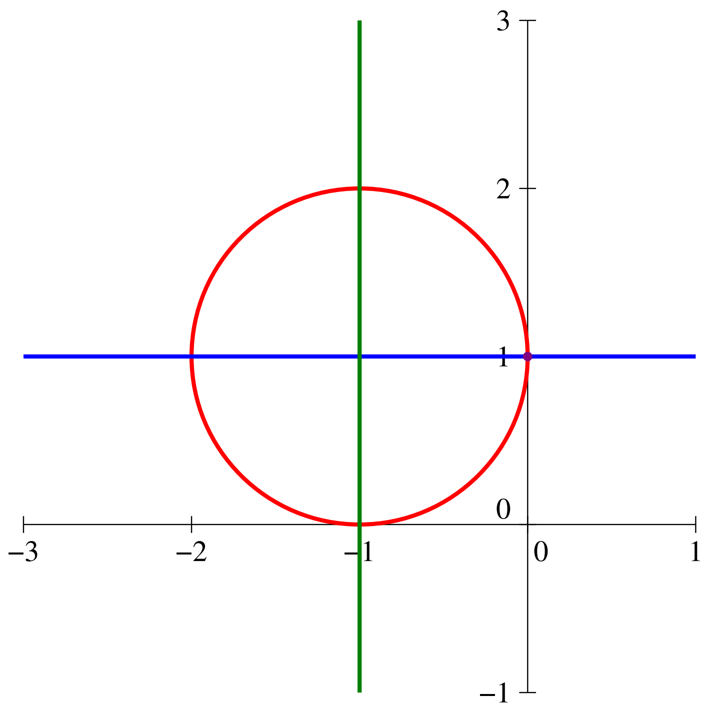
4. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$. Cette expression est négative d'après la question précédente, donc (u_n) est décroissante. Puisque (u_n) est décroissante et positive, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est croissante, et (v_n) également. Nos deux suites sont donc monotones et bornées (d'après la question 2), elles sont convergentes (mais on ne peut pas dire plus pour l'instant).
5. On sait que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2} \times \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$. Or, les encadrements de la question 2 prouvent que $u_n + v_n \geqslant 3$, et que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{12}$ (ce qui est encore mieux que ce que l'énoncé demandait).
6. On peut effectuer une petite récurrence : au rang 0, on sait que $u_0 - v_0 = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 \times 6^0}$, donc l'inégalité est en fait une égalité (et elle est donc vraie !). Supposons maintenant l'inégalité demandée vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente (et l'hypothèse de récurrence) $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{6}(u_n - v_n) \leqslant \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2 \times 6^n} = \dfrac{1}{2 \times 6^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève donc la récurrence.
7. Comme $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$ (on a vu à la question 3 que $u_n - v_n \geqslant 0$, donc $u_n - v_n \geqslant 0$), et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2 \times 6^n} = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$. Cette limite, combinée aux monotonies des deux suites, permet de dire que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. En particulier, elle ont une limite commune l. Comme par définition on a $u_n \times v_n = 3$, et que par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = l^2$ (par simple produit de limites), on en déduit que $l^2 = 3$, et donc $l = \sqrt{3}$ (les deux suites ayant clairement une limite positive).
8. On souhaite avoir $|u_n - l| \leqslant 10^{-10}$. Or, par adjacence des deux suites, on sait qu'on aura toujours $v_n \leqslant l \leqslant u_n$, et donc $|u_n - l| \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$. Une condition suffisante (mais pas nécessaire, bien sûr) pour obtenir la valeur approchée souhaitée est donc que $\dfrac{1}{2 \times 6^n} \leqslant 10^{10}$, soit $6^n \geqslant \dfrac{10^{10}}{2}$, donc en passant au logarithme de base 6 (histoire de faire original), $n \geqslant \log_6(10^{10}) - \log_6(2)$ (valeur qui, pour les curieux, a une partie entière égale à 11. Il suffit donc de prendre $n = 12$ pour être certain d'avoir dix décimales correctes en prenant u_n comme approximation de $\sqrt{3}$. Si on se contente de $n = 4$, par le même raisonnement, on est certains d'avoir un écart inférieur à $\dfrac{1}{2 \times 6^4} = \dfrac{1}{2 \times 1\ 296} = \dfrac{1}{2\ 592}$. Cette valeur est comprise entre 10^{-3} et 10^{-4}, on aura donc au minimum trois décimales correctes.

Exercice 3

1. Posons donc $f(z) = Z$ et tentons d'exprimer z en fonction de Z : $\dfrac{iz + 1 + 2i}{z - i} = Z \Rightarrow iz + 1 + 2i = Zz - iZ \Rightarrow iz - Zz = -iZ - 1 - 2i \Rightarrow z = \dfrac{iZ + 1 + 2i}{Z - i}$, cette dernière expression n'étant bien sûr définie que pour $Z \in D$ pour que le dénominateur ne s'annule pas. Autrement dit, on a en fait $z = f(Z)$, ce qui prouver que $f \circ f = id_D$, et en particulier que l'application f est bien bijective de D dans lui-même (et qu'elle est sa propre réciproque).
2. Calculons donc : $f(3i) = \dfrac{-3 + 1 + 2i}{3i - i} = \dfrac{-2 + 2i}{2i} = 1 + i$; $f(-i) = \dfrac{2 + 2i}{-2i} = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; et enfin $f(e^{i\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + 1 + 2i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - i} = \dfrac{1 + (4 - \sqrt{3})i}{-\sqrt{3} - i} =$

$\dfrac{(1+(4-\sqrt{3})i)(-\sqrt{3}+i)}{3+1} = \dfrac{-\sqrt{3}+i+(3-4\sqrt{3})i-4+\sqrt{3}}{4} = -1+(1-\sqrt{3})i.$

3. Posons donc $z = a+ib$ et calculons $f(z) = \dfrac{ai-b+1+2i}{a+ib-i} = \dfrac{(1-b+(a+2)i)(a+i(1-b))}{a^2+(b-1)^2} = \dfrac{a-ba+i(1-2b+b^2)+i(a^2+2a)-a+ab-2+2b}{a^2+(b-1)^2} = \dfrac{2b-2+i(a^2+2a+b^2-2b+1)}{a^2+(b-1)^2}$. En particulier, la partie réelle de $f(z)$ est donc égale à $\dfrac{2b-2}{a^2+(b-1)^2}$, et sa partie imaginaire à $\dfrac{a^2+2a+b^2-2b+1}{a^2+(b-1)^2}$.
4. D'après la question précédente, $f(z) \in \mathbb{R}$ si $a^2+2a+b^2-2b+1 = 0$, soit $(a+1)^2-1+(b-1)^2 = 0$, ou encore $(a+1)^2+(b-1)^2 = 1$. On reconnait l'équation du cercle de centre $M(-1+i)$ et de rayon 1 (en rouge sur la figure après la question 6). Si on est rigoureux, on précise qu'il faut enlever de ce cercle le point d'affixe i.
5. Cette fois on a comme condition $2b-2 = 0$, donc $b = 1$. Les points correspondants sont situés sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ dans le plan complexe (privée à nouveau du point d'affixe i), en bleu sur la figure ci-dessous.
6. Pour cette dernière question, il vaut mieux revenir à la définition initiale de f : $f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \left|\dfrac{iz+1+2i}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |iz+1+2i|^2 = |z-i|^2$ (on peut élever sans problème au carré, tout est positif). En posant maintenant $z = a+ib$, on trouve la condition $|1-b+i(2+a)|^2 = |a+i(b-1)|^2$, soit $(b-1)^2+(2+a)^2 = a^2+(b-1)^2$ ou encore $(a+2)^2-a^2 = 0$, ce qui donne $4a+4 = 0$ et donc $a = -1$. Il s'agit d'une droite verticale d'équation $x = -1$ dans le plan complexe (en vert sur le dessin). On pouvait aussi obtenir cette droite à partir de l'égalité des modules de $iz+1+2i$ et de $z-i$ comme médiatrice du segment reliant les points d'affixe $i-2$ (après avoir tout divisé par i pour reconnaitre une distance) et i. Voici la passionnante figure promise :



7. (a) Il s'agit (quitte à passer le dénominateur de $f(z)$ de l'autre côté) de résoudre l'équation $iz+1+2i = z^2-iz$, soit $z^2-2iz-1-2i = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $\Delta = -4+4(1+2i) = 8i$. Pour une fois, on peut se passer de la méthode

classique à base d'écriture algébrique pour obtenir les racines carrées de ce discriminant : $\Delta = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc on peut simplement prendre $\delta = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (dont le carré est trivialement égal à Δ), soit $\delta = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+2i$. Les solutions de notre équation sont donc les deux nombres complexes $z_1 = \dfrac{2i+2+2i}{2} = 1+2i$, et $z_2 = \dfrac{2i-2-2i}{2} = -1$. On notera donc $a = -1$ et $b = 1+2i$.

(b) Calculons donc : $\dfrac{a-i}{b-i} = \dfrac{-1-i}{1+i} = -1$. Une question particulièrement difficile.

(c) Un peu plus pénible : on multiplie tout en haut et en bas par $z-i$ pour ne pas trainer des dénominateurs horribles : $\dfrac{b-f(z)}{a-f(z)} = \dfrac{(1+2i)(z-i)-iz-1-2i}{i-z-iz-1-2i} = -\dfrac{(1+i)z+1-3i}{(1+i)z+1+i} = -\dfrac{z+\dfrac{1-3i}{1+i}}{z+1} = -\dfrac{z+\frac{(1-3i)(1-i)}{2}}{z-a} = \dfrac{z-1-2i}{a-z} = -\dfrac{b-z}{z-a}$.

8. (a) C'est une conséquence quasiment évidente du dernier calcul effectué : $\arg\left(\dfrac{b-f(z)}{a-f(z)}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{b-z}{a}\right)[\pi]$ puisque les deux nombres sont opposés, or ces arguments s'interprètent comme des angles, ce qui donne directement $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'})[\pi]$. La propriété donnée dans l'énoncé permet alors de conclure que A, B, M et M' sont soit alignés soit situés sur un même cercle (ce qui revient bien à dire que M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM).

(b) Calculons $\dfrac{f(z)-i}{z-i} = \dfrac{iz+1+2i-i(z-i)}{(z-i)^2} = \dfrac{2i}{(z-i)^2}$. Il suffit alors de constater que $(b-i)^2 = (1+i)^2 = 2i$ pour en déduire que $\dfrac{f(z)-i}{z-i} = \left(\dfrac{(b-i)^2}{(z-i)^2}\right)^2$. En prenant les arguments de ces nombres, l'égalité demandée devient immédiate puisque $\arg\left(\dfrac{(b-i)^2}{(z-i)^2}\right) \equiv 2\arg\left(\dfrac{b-i}{z-i}\right)[2\pi]$.

(c) Pour construire rigoureusement le point M', on peut procéder de la façon suivante :

- on trace le cercle circonscrit au triangle ABM. Rappelons en passant que ce cercle a pour centre le point Z de concours des médiatrices des côtés du triangle, qu'on peut toujours tracer sans difficulté à la règle et au compas (construction classique : on choisit une longueur plus grande que la moitié de la longueur du segment, et on reporte cette longueur à partir des deux extrémités du segment, de façon à déterminer deux points à égale distence de ces extrémités ; il ne reste plus qu'à tracer la droite passant par ces deux points, qui est la médiatrice recherchée).
- on trace le symétrique N du point M par rapport à la droite (BC) : pour cela on reporte les longueurs CM et BM à partir des points C et B pour trouver un deuxième point N vérifiant $BN = BM$ et $CN = CM$, ce deuxième point est le symétrique recherché.
- le point M' est alors situé sur la droite (CN) (à cause de l'égalité d'angles vérifiée à la question b, je vous laisse y réfléchir si vous n'êtes pas convaincus) et sur le cercle circonscrit tracé auparavant.

(d) Sur la figure suivante, la médiatrice de $[BM]$ a pour équation $x = \dfrac{3}{2}$ (c'est évident) et celle de $[AB]$ a pour équation $y = 1?x$ (là aussi c'est à peu près évident) donc le centre du cercle circonscrit est $Z\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$. Ce point et le cercle sont en vert sur le dessin. En violet se trouve le point N (je n'ai pas mis de traits de construction, sinon ça va surcharger la figure), le point M' est à l'intersection de (CN) et du cercle. On peut vérifier facilement : $f(2+2i) = \dfrac{2i-2+1+2i}{2+i} = \dfrac{(-1+4i)(2+i)}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{5}i$, ce qui correspond bien à l'affixe du point obtenu.