TD n° 5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2019

Exercice 0 (mise en jambes)

Les questions de cet exercice sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation $z^3 + (3i - 3)z^2 - (3 + 4i)z + 1 - 7i = 0$.
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -2u_n + 6$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(x)\sin(x)\, dx$ en effectuant au prélable une linéarisation.

Exercice 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe de module 1. On note alors $f(z) = \left|1 - z + \dfrac{z^2}{2}\right|$.

1. Calculer $f(z)$ lorsque $z = i$, puis lorsque $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Expliquer pourquoi on a nécessairement $0 \leqslant f(z) \leqslant \dfrac{5}{2}$.
3. Rappeler quelle relation relie a et b lorsque z est de module 1. En déduire une expression de $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de a uniquement.
4. Déterminer un polynôme du second degré P tel que $f(z) = P(a)$ (en notant toujours a la partie réelle de z).
5. Étudier la fonction f, et en déduire son maximum et son minimum sur l'intervalle $[-1, 1]$.
6. En déduire un encadrement de $f(z)$ meilleur que celui de la question 2. Les bornes de ce nouvel encadrement peuvent-elles être atteintes ?

Exercice 2

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par les conditions suivantes : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$ puis $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Calculer les valeurs exactes de v_0, u_1, v_1 et u_2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de v_2. Cette valeur approchée est-elle une valeur approchée par défaut ou par excès ?
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont bornées par $\dfrac{3}{2}$ et par 2.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$. En déduire que $u_n \geqslant v_n$.
4. Déterminer la monotonie des deux suites (u_n) et (v_n). Que peut-on en conclure sur les deux suites ?
5. Montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{6}$.

6. En déduire que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$.
7. Que peut-on dire sur les deux suites (u_n) et (v_n) au vu des résultats des questions 4 et 6 ? Déterminer la valeur de leur limite commune l.
8. Déterminer une valeur de n pour laquelle on peut être certain que u_n représente une valeur approchée à 10^{-10} près de sa limite l (on cherche une formule théorique, on ne cherchera pas à faire l'application numérique !). Combien de décimales de l la valeur de u_4 permettrait-elle de calculer avec certitude ?

Exercice 3

On note f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ (ensemble qu'on notera D pour la suite de l'exercice) par $f(z) = \dfrac{iz + 1 + 2i}{z - i}$.

1. Vérifier que l'application f effectue une bijection de D dans lui-même (on donnera une expression de sa réciproque f^{-1}).
2. Déterminer $f(3i)$ (sous forme algébrique), $f(-i)$ (sous forme exponentielle) et $f(e^{i\frac{5\pi}{6}})$ (sous forme algébrique).
3. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
7. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$. On notera ses deux solutions a et b, avec $\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.
   (b) Calculer $\dfrac{a - i}{b - i}$.
   (c) Montrer que, si $z \notin \{i, a\}$, alors $\dfrac{b - f(z)}{a - f(z)} = -\dfrac{b - z}{a - z}$.
8. Pour cette dernière question, on admet que quatre points A, B, C et D du plan complexe sont situés sur une même droite ou sur un même cercle si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$. On note par ailleurs A, B et C les points respectifs du plan complexe d'affixes a, b et i.
   (a) Montrer que, si $M \notin \{A, B, C\}$, M' est soit aligné avec A, B et M, soit sur le cercle circonscrit au triangle ABM (on a ici noté M et M' les points d'affixes respectives z et z', pour un certain nombre complexe z).
   (b) Montrer que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) \equiv 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})[2\pi]$.
   (c) En déduire une construction géométrique de M' quand M n'est pas sur la droite (AB).
   (d) Faire une figure précise dans le cas où M a pour affixe $z = 2 + 2i$.