TD n^o 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 novembre 2019

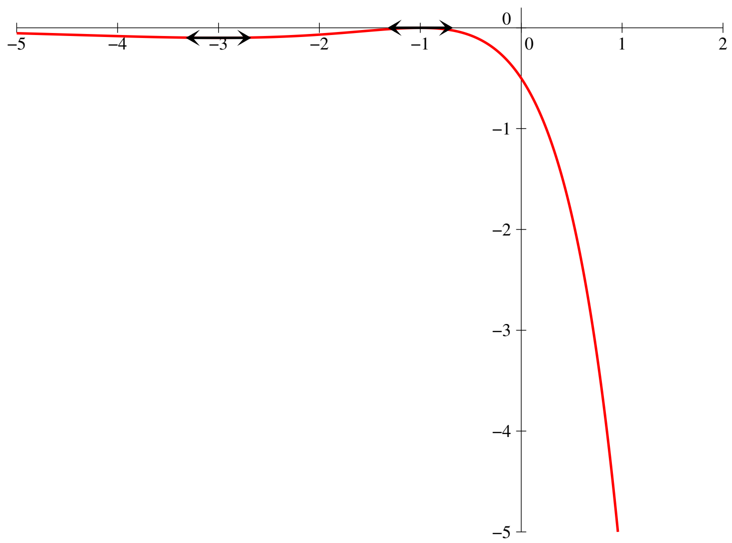
Exercice 1

1. On pose donc $t = \dfrac{1}{2}x - 1$, soit $x = 2t + 2$, ce qui implique en particulier $dx = 2\ dt$. Les bornes de l'intégrale deviennent $\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$ et $1 - 1 = 0$, et surtout ce qui se trouve sous la racine devient $4x - x^2 = 4(2t+2) - (2t+2)^2 = 8t + 8 - 4t^2 - 8t - 4 = 4(1 - t^2)$. On peut donc écrire $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{4 - 4t^2}} \times 2\ dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\ dt = [\arcsin(t)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{\pi}{6}$.
2. Effectuons donc une démonstration par récurrence : lorsque $n = 1$ (on peut même commencer à $n = 0$ si on préfère), la somme de gauche vaut -1 et le membre de droite vaut $(-1) \times \dfrac{1 \times 2}{2} = -1$, l'égalité est donc vérifiée. Supposons-la maintenant vérifiée au rang n pour un certain entier $n \geqslant 1$. On peut alors écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1^{n+1})(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. Comme $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, on peut factoriser notre expression sous la forme $(-1)^{n+1}(n+1)\left(n + 1 - \dfrac{n}{2}\right) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui est exactement la formule qu'on souhaitait démontrer. La propriété est donc vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
3. On commence par effectuer une décomposition en éléments simples : $\dfrac{x-1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ pour trois réels a, b et c à déterminer. En multipliant par x, on doit avoir $a + \dfrac{bx}{x+1} + \dfrac{cx}{x+2} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}$, ce qui donne lorsque x tend vers 0 la valeur $a = -\dfrac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x + 1$ et en faisant tendre x vers -1, on trouve $b = \dfrac{-2}{-1} = 2$. Enfin, si on fait tendre x vers $+\infty$ après avoir multiplié par x, on trouve $a + b + c = 0$, donc $c = -a - b = -\dfrac{3}{2}$. Il est maintenant temps de calculer notre intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)}\ dx = \int_1^2 -\frac{1}{2x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+2)}\ dx = \left[-\frac{1}{2}\ln(x) + 2\ln(x+1) - \frac{3}{2}\ln(x+2)\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\ln(2) + 2\ln(3) - \frac{3}{2}\ln(4) - 2\ln(2) + \frac{3}{2}\ln(3) = -\frac{11}{2}\ln(2) + \frac{7}{2}\ln(3)$.
4. Il suffit de calculer d'abord la somme dépendant de l'indice i pour avoir ensuite une simplification bienvenue : $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6j(j+1)} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} 2j + 1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+2)}{6}$.

5. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants est $x^2 - 4x + 3 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et pour racines $r_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (oui, on pouvait aussi constater qu'il y avait une racine évidente) et $r_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée à notre équation sont donc les fonctions définies par des équations de la forme $y_h(x) = Ae^x + Be^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On cherche désormais une solution particulière à l'équation complète sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ (puisque 1 a le mauvais goût d'être racine de l'équation caractéristique). On calcule donc $y_p'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, puis $y_p''(x) = (2a + b + 4ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$. On introduit ces expression dans l'équation complète, et on se permet en passant de supprimer les e^x qui se factorisent partout : y_p est solution si $2a + 2b + c + 4ax + bx + ax^2 - 4b - 4c - 8ax - 4bx - 4ax^2 + 3ax^2 + 3bx + 3c = 2x + 1$, soit $-4ax + 2a - 2b = 2x + 1$. Une identification immédiate donne $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -1$ (on peut choisir c comme on le souhaite, on prendra donc $c = 0$), soit $y_p(x) = \left(-\dfrac{x^2}{2} - x\right)e^x$. Toutes les solutions de l'équation ont alors des équations de la forme $y(x) = \left(-\dfrac{x^2}{2} - x + A\right)e^x + Be^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Pour la résolution du problème de Cauchy, on commence par évaluer en 0 à l'aide de l'expression précédente, ce qui donne $A + B = -\dfrac{1}{2}$. Puis on calcule $y'(x) = \left(-x - 1 - \dfrac{x^2}{2} - x + A\right)e^x + 3Be^{3x}$, ce qui évalué en 0 donne la seconde condition $-1 + A + 3B = -\dfrac{3}{2}$. En soutrayant la première condition à celle-ci, on trouve $-1 + 2B = -1$, donc $B = 0$. Reste alors $A = -\dfrac{1}{2}$, donc $y(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)e^x = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2e^x$. On peut déjà constater que la fonction y ne prend que des valeurs négatives et s'annule en $x = -1$, où il y aura donc un maximum pour y. Mais reprenons le calcul de y' à partir de cette nouvelle expression : $y'(x) = -(x+1)e^x - \dfrac{1}{2}(x+1)^2e^x = -\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}\right)(x+1)e^x$. En particulier, y' s'annule sans surprise pour $x = -1$, mais aussi pour $x = -3$, où la fonction admettra un munimum de valeur $y(-3) = -\dfrac{1}{2} \times 4e^{-3} = -\dfrac{2}{e^3} \simeq -0.1$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$ (calcul direct) et $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$ (croissance comparée très classique, on développe tout pour vraiment être dans le cadre du cours). Bref, un tableau de variations ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-2e^3$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Et une courbe de ce type :



Exercice 2

1. Posons donc $x = \tan(t)$, ou $t = \arctan(x)$, ce qui implique donc $dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$. Ça tombe bien, puisqu'on donc faire disparaitre un facteur $\dfrac{1}{1+x^2}$ de l'intégrale de départ « dans le dt ». On obtient donc $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\tan^2(t)}\,dt$. Or, on sait bien que $1+\tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$ (formules de dérivation de la fonction tangente), et par ailleurs que $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2} + \dfrac{1}{2}$ en utilisant la formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On en déduit que $F(x) = \displaystyle\int \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\,dt = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} = \frac{\sin(\arctan(x)}{4} + \frac{\arctan(x)}{2}$. Remarquons déjà qu'il s'agit bien de la primitive F cherchée puisque cette fonction s'annule en 0. On peut toutefois la simplifier un peu : en continuant à noter $t = \arctan(x)$, comme $1+\tan^2(\arctan(x)) = 1+x^2$, on a $\cos^2(t) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et donc $\sin^2(t) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. On en déduit que $\sin^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, donc $\sin^2(2t) = 4\sin^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$. Or, $\sin(2t)$ est du signe de x (en effet, si $x \geqslant 0$, $\arctan(x) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $2t \in [0, \pi[$ et $\sin(2t) \geqslant 0$, et de même si $x \leqslant 0$), donc on aura toujours $\sin(2t) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. On peut enfin exprimer plus simplement notre primitive : $F(x) = \dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

2. (a) On va donc calculer $G(x) = \displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ en posant $v(x) = x$, et donc $v'(x) = 1$, et $u'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, qui admet par exemple pour primitive $u(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ (puisqu'on a une forme $\dfrac{u'}{u^2}$ à une constante près). On en déduit que $G(x) = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \displaystyle\int \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$.

   (b) En écrivant brillamment $f(x) = \dfrac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - g(x)$, on constate qu'une primite de f est donnée par l'expression $\arctan(x) - G(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{1}{2(x^2+1)}$. Cette primitive s'annulant en 0, il s'agit de la fonction F.

3. (a) Utilisons donc la méthode brutale de mise au même dénominateur : $\dfrac{\alpha}{x-i} + \dfrac{\beta}{(x-i)^2} + \dfrac{\overline{\alpha}}{x+i} + \dfrac{\overline{\beta}}{(x+i)^2} = \dfrac{\alpha(x+i)^2(x-i) + \beta(x+i)^2 + \overline{\alpha}(x-i)^2(x+i) + \overline{\beta}(x-i)^2}{(x^2+1)^2}$. Contentons-nous de recopier le numérateur, qu'on notera N, en développant tout : $N = \alpha(x^2+1)(x+i) + \overline{\alpha}(x^2+1)(x-i) + \beta(x^2+2ix-1) + \overline{\beta}(x^2-2ix-1) = (\alpha+\overline{\alpha})x^3 + (i\alpha - i\overline{\alpha} + \beta + \overline{\beta})x^2 + (\alpha + \overline{\alpha} + 2i\beta - 2i\overline{\beta})x + i\alpha - i\overline{\alpha} - \beta - \overline{\beta})$. Cette magnifique expression est censée être égale à 1, identifions donc : le terme en x^3 s'annule, ce qui implique $\alpha + \overline{\alpha} = 0$, autrement dit α doit être imaginaire pur. Pour que le terme en x s'annule, on doit alors avoir $\beta - \overline{\beta} = 0$, donc β doit être réel. En notant a la partie imaginaire de α, le coefficient de x^2 (qui doit être nul aussi) vaut maintenant $-2a + 2\beta$, et le coefficient constant, qui doit être égal à 1, vaut $-2a - 2\beta$. En additionnant ces deux conditions, on trouve $-4a = 1$, soit $a = -\dfrac{1}{4}$, et donc $\alpha = -\dfrac{i}{4}$. En les soustrayant, $\beta = -\dfrac{1}{4}$. Il est temps de conclure : $\dfrac{1}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{i}{4(x-i)} + \dfrac{i}{4(x+i)} - \dfrac{1}{4(x-i)^2} + \dfrac{1}{4(x+i)^2}$.

(b) En effet, $-\dfrac{i}{4(x-i)} + \dfrac{i}{4(x+i)} = \dfrac{i(x-i) - i(x+i)}{4(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x^2+1)}$, qui admet pour primitive $-\dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

(c) Il suffit de prendre $-\dfrac{\beta}{x-i}$, soit ici $\dfrac{1}{4(x-i)}$. On peut se contenter de prendre le conjugué pour une primitive de $\dfrac{\overline{\beta}}{(x+i)^2}$, qui sera donc $\dfrac{1}{4(x+i)}$.

(d) En additionnant les trois primitives calculées aux questions précédentes, on trouve $-\dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{1}{4(x+i)} + \dfrac{1}{4(x-i)} = -\dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$. On retrouve bien la bonne expression de F (qui est clairement réelle !).

Problème

A. Calculs préliminaires.

1. On peut mettre au même dénominateur, ce qui ira très vite ici : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} = \dfrac{ax^2 + a + bx^2 + cx}{x(x^2+1)}$. On veut que le numérateur soit égal à 1, une identification facile donne $a = 1$ (terme constant), $c = 0$, puis $a + b = 0$, donc $b = -1$. Autrement dit, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$. Une primitive de cette fonction est $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

2. On va calculer $\displaystyle\int (1-x^2)\ln(x)\ dx$ par une IPP en posant $v(x) = \ln(x)$, donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $u'(x) = 1 - x^2$, on peut donc prendre $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$. On a alors $\displaystyle\int (1-x^2)\ln(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - \int 1 - \frac{x^2}{3}\ dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) + \frac{x^3}{9} - x$.

3. Là aussi on procède par IPP en posant $v(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $u'(x) = x$ avec $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ qui convient. On obtient donc $\displaystyle\int x\ln(x)\ dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$.

B. Résolution de l'équation homogène (E_0).

1. Si $y(x) = x$, on a $y'(x) = 1$ et $y''(x) = 0$, et en remplaçant dans le membre de gauche de notre équation, $-\dfrac{2x}{1+x^2} \times 1 + \dfrac{2}{1+x^2} \times x$ est bien égal à 0.
2. Autrement dit, on a $y(x) = xz(x)$, donc $y'(x) = z(x) + xz'(x)$, puis $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$. On met tout ça dans notre équation homogène pour obtenir $2z'(x) + xz''(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}z(x) - \dfrac{2x^2}{1+x^2}z'(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}z(x) = 0$, soit $xz''(x) + \dfrac{2}{1+x^2}z'(x) = 0$ en mettant les termes en z' au même dénominateur.
3. On normalise : $w' + \dfrac{2}{x(1+x^2)}w = 0$. Une primitive de notre coefficient (à un facteur 2 près) ayant déjà été déterminée plus haut, on peut directement donner les solutions de l'équation (qui est homogène) : elles sont de la forme $w(x) = Ke^{-2\ln(x)+\ln(x^2+1)} = \dfrac{K(x^2+1)}{x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire $w(x) = K + \dfrac{K}{x^2}$, fonction dont il suffit de calculer les primitives pour obtenir les fonctions z convenables : $z(x) = Kx - \dfrac{K}{x} + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ (attention à ne pas oublier la seconde constante issue de l'intégration).
4. Il suffit de conclure : $y(x) = xz(x) = Kx^2 + Lx - K$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

C. Résolution de l'équation complète (E).

1. C'est un simple calcul : $y_p'(x) = A(x) + xA'(x) + 2xB(x) + (x^2-1)B'(x)$. Avec l'hypothèse effectuée dans l'énoncé, il ne reste que $y_p'(x) = A(x) + 2xB(x)$. En dérivant cette expression, on a ensuite $y_p''(x) = A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x)$.

2. Encore une fois, on remet tout dans l'équation : $A'(x) + 2B(x) + 2xB'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}A(x) - \dfrac{4x^2}{1+x^2}B(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}A(x) + \dfrac{2x^2-2}{x^2-1}B(x) = (x^2+1)\ln(x)$, ce qui se simplifie comme prévu en $A'(x) + 2xB'(x) = (x^2+1)\ln(x)$.
3. En notant (1) la condition imposée dans l'énoncé, et (2) la deuxième relation obtenue à la question précédente, on peut calculer $(1) - x \times (2)$ pour obtenir $(x^2 - 1 - 2x^2)B'(x) = -x(x^2+1)\ln(x)$, soit $B'(x) = x\ln(x)$. On a vu plus haut qu'on pouvait donc prendre $B(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^2}{4}$. Ensuite, on reprend par exemple (2) pour trouver $A'(x) = (x^2+1)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln(x)$, et là encore on a déjà tout calculé : on peut prendre $A(x) = \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\ln(x) + \dfrac{x^3}{9} - x$. Une solution de notre équation complète est donc la fonction $y_p : x \mapsto \left(x^2 - \dfrac{x^4}{3}\right)\ln(x) + \dfrac{x^4}{9} - x^2 + \dfrac{x^4 - x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{4} = \left(\dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \dfrac{5}{36}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2$.
4. Il n'y a plus qu'à recopier : $y(x) = \left(\dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \dfrac{5}{36}x^4 + \left(K - \dfrac{3}{4}\right)x^2 + Lx - K$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.