

# TD n° 4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

21 novembre 2019

## Exercice 1

Effectuer les calculs suivants (les questions sont indépendantes) :

1. Calculer l'intégrale  $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$  en effectuant le changement de variable  $t = \frac{1}{2}x - 1$ .
2. Prouver par récurrence la formule suivante :  $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ .
3. Calculer  $\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} dx$ .
4. Calculer (et simplifier) la somme double  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$ .
5. Résoudre l'équation différentielle  $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$ . Déterminer la solution de cette équation vérifiant  $y(0) = -\frac{1}{2}$  et  $y'(0) = -\frac{3}{2}$ . Étudier cette solution et tracer une allure de la courbe intégrale correspondante.

## Exercice 2

On cherche dans cet exercice à déterminer la primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$  s'annulant en 0. On notera  $F$  cette primitive. Les trois questions de l'exercice présentent trois méthodes différentes pour ce calcul de primitive et sont donc complètement indépendantes.

1. Effectuer un calcul direct de la primitive  $F$  en effectuant le changement de variable  $x = \tan(t)$ .
2. (a) Calculer à l'aide d'une IPP une primitive de la fonction  $g : x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$  (on pourra poser dans cet IPP  $v(x) = x$ , et donc  $u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ ).  
(b) À l'aide d'une réécriture astucieuse de  $f(x)$ , exploiter le résultat précédent pour retrouver l'expression de  $F$ .
3. On admet qu'on peut effectuer sur  $f(x)$  une décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}$  donnant une égalité de la forme  $f(x) = \frac{\alpha}{x-i} + \frac{\beta}{(x-i)^2} + \frac{\bar{\alpha}}{x+i} + \frac{\bar{\beta}}{(x+i)^2}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes complexes.  
(a) Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ .  
(b) Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{\alpha}{x-i} + \frac{\bar{\alpha}}{x+i}$  (on commencera par tout remettre au même dénominateur).

- (c) Déterminer une primitive **complexe** de la fonction  $x \mapsto \frac{\beta}{(x-i)^2}$ . En déduire une primitive de  $x \mapsto \frac{\bar{\beta}}{(x+i)^2}$ .
- (d) Déduire de tous ces calculs une primitive de  $f$ , dont on vérifiera qu'elle est bien réelle. Conclure.

## Problème

On s'intéresse dans ce problème à la résolution sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$  de l'équation différentielle  $(E)$  :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x)$$

On notera  $(E_0)$  l'équation homogène associée à l'équation  $(E)$ .

### A. Calculs préliminaires.

- Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ . En déduire une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$  sur l'intervalle  $I$ .
- Déterminer une primitive sur  $I$  de la fonction  $g : x \mapsto (1-x^2)\ln(x)$ .
- Déterminer une primitive sur  $I$  de la fonction  $h : x \mapsto x\ln(x)$ .

### B. Résolution de l'équation homogène $(E_0)$ .

- Montrer que la fonction  $x \mapsto x$  est solution de cette équation.
- Soit  $y$  une solution de  $(E_0)$ . On pose  $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ . Vérifier que  $z$  est alors solution de l'équation différentielle  $xz'' + \frac{2}{1+x^2}z' = 0$ .
- Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente (on pourra commencer par poser  $w = z'$  et déterminer les fonctions  $w$  convenables).
- En déduire les solutions de l'équation  $(E_0)$  (on admettra que l'implication prouvée à la question 2 est en fait une équivalence).

### C. Résolution de l'équation complète $(E)$ .

On cherche une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y_p(x) = xA(x) + (x^2-1)B(x)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux fonctions dérivables sur  $I$  et vérifiant la condition supplémentaire suivante :  $\forall x \in I, xA'(x) + (x^2-1)B'(x) = 0$ .

- Exprimer  $y_p'$  et  $y_p''$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
- Montrer que  $y_p$  est solution de  $(E)$  si  $A'(x) + 2xB'(x) = (x^2+1)\ln(x)$ .
- Déterminer  $A'$  et  $B'$ , puis en déduire une fonction  $y_p$  solution de  $(E)$ .
- Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .