TD n^{o} 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 octobre 2019

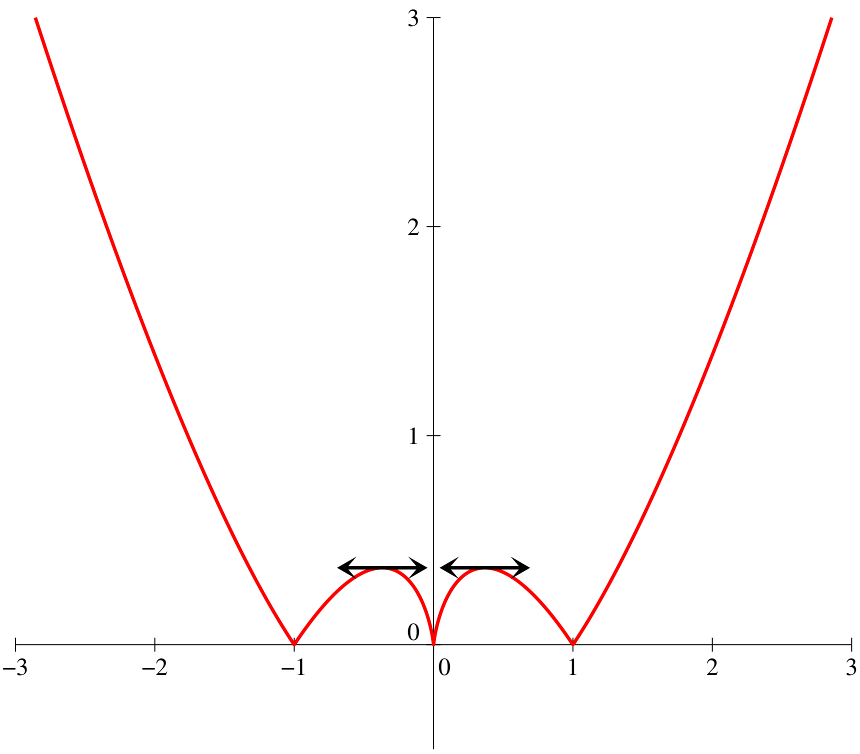
Exercice 1

1. On peut utiliser une formule de transformation somme-produit sur les deux termes extrêmes pour obtenir $\cos(4x) + \cos(14x) = 2\cos(9x)\cos(5x)$, et donc réécrire notre équation sous la forme $\cos(9x)(2\cos(5x)+1) = 0$. L'équation est donc vérifiée si $\cos(9x) = 0$, soit $9x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ou encore $x \equiv \dfrac{\pi}{18}\left[\dfrac{\pi}{9}\right]$; ou si $\cos(5x) = -\dfrac{1}{2}$, soit $5x = \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{2\pi}{15}\left[\dfrac{2\pi}{5}\right]$ ou $x \equiv -\dfrac{2\pi}{15}\left[\dfrac{2\pi}{5}\right]$. Inutile d'essayer de regrouper ces solutions sous une forme simple, ça ne fonctionnera pas.
2. Un calcul de somme tout à fait classique : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} 3^{k-1}2^{2-k} = \sum_{k=0}^{n+1} 3^k 2^{1-k}$ via un petit changement d'indice. Ensuite, $S = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2 \times \frac{1-(\frac{3}{2})^{n+2}}{1-\frac{3}{2}} = 4\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} - 1\right) = \frac{3^{n+2}}{2^n} - 4$.
3. On peut déjà commencer par remarquer que $\cos\left(\dfrac{12\pi}{9}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Pour ceux qui restent, on ne connait bien sûr pas les valeurs, tentons une transformation somme-produit sur deux des trois termes (peu importe lesquels) : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$. Ça tombe vraiment fort bien puisqu'à côté de ça il nous reste un $\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$. Les trois premiers termes de la somme s'annulent donc et la valeur cherchée est simplement $-\dfrac{1}{2}$.
4. L'équation est définie pour tout réel, et on a bien sûr envie de mettre une tangente autour de chaque membre, mais attention, l'équation obtenue ne sera pas équivalente ! On obtient alors $\tan(\arctan(2x) + \arctan(3x)) = 1$, soit $\dfrac{2x+3x}{1-2x\times 3x} = 1$, soit encore $5x = 1 - 6x^2$. On est donc ramenés à l'équation du second degré $6x^2 + 5x - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, et pour solutions $x_1 = \dfrac{-5-7}{12} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{12} = \dfrac{1}{6}$. La valeur x_1 ne peut sûrement pas être solution de l'équation de départ puisque $\arctan(-2) + \arctan(-3) < 0$ (puisque les tangentes sont égales, on en déduit en fait que $\arctan(-2) + \arctan(-3) = -\dfrac{3\pi}{4}$. Par contre, $\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) \in [0, \pi[$ (somme de deux arctangentes de nombres positifs), et a une tangente égale à 1, donc cet angle est bien égal à $\dfrac{\pi}{4}$, et l'unique solution de notre équation est $\dfrac{1}{6}$.

5. Il faut que $|x| > 0$ pour que f soit définie, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. De plus, $f(-x) = |-x\ln(|x|)| = f(x)$, donc f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, on a $f(x) = |x\ln(x)|$, on peut donc poser $g(x) = x\ln(x)$ et étudier g pour commencer. La fonction g est dérivable, de dérivée $g'(x) = \ln(x) + 1$ qui s'annule pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. De plus, g est négative sur $]0, 1]$ et positive ensuite, et $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$. Enfin, on a sans problème $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, et par croissance comparée classique $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. On peut donc dresser le tableau de variations de g et en déduire celui de f (pour f, on donnera même le tableau complet) :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
g							$\Vert$ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	0	↗	$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$0 \Vert 0$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

Une petite allure de courbe pour terminer :



Exercice 2

1. La fonction f est 2π-périodique (le $\cos(3x)$ a même une période minimale plus petite de $\dfrac{2\pi}{3}$, mais pour le $\cos^3(x)$ on ne peut pas descendre en-dessous de 2π), et paire (puisque cos l'est, le fait de mettre au cube ou de composer par $3x$ n'y change rien), donc on va l'étudier sur

l'intervalle $I = [0, \pi]$ (par symétrie due à la parité, on récupèrera la courbe sur $[-\pi, 0]$ et on aura ainsi une période complète).

2. C'est du calcul basique : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi)\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \times \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$, et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \times \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}$.

3. C'est du calcul nettement moins basique. Commençons donc par évaluer $\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{(1+\sqrt{5})^3}{4^3} = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{64} = \frac{2+\sqrt{5}}{8}$, puis rappelons-nous des formules de triplication pour calculer $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+3\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Il ne reste plus qu'à faire le produit des deux valeurs : $f\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \times \frac{2+\sqrt{5}}{8} = \frac{-3-\sqrt{5}}{32}$. Oui, vous m'otez les mots de la bouche, c'est absolument palpitant comme résultat.

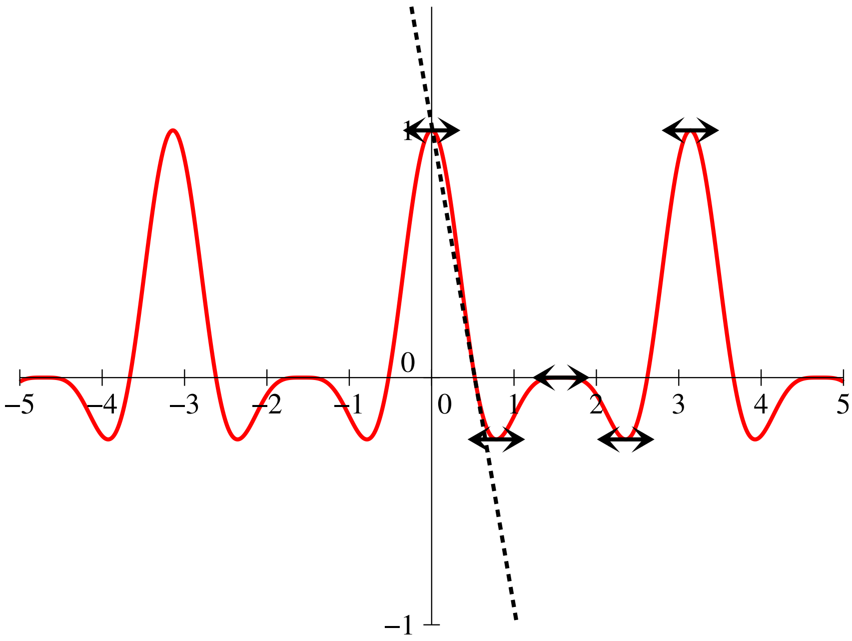
4. Aucune raison de compliquer les choses, il faut avoir $\cos(3x) = 0$, ou $\cos(x) = 0$. En fait il suffit de se limiter à la première condition, car si $\cos(x) = 0$ alors $\cos(3x) = 0$ (c'est facile à prouver). On doit donc avoir $3x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.

5. Une façon de faire est de partir de la forme développée $f(x) = 4\cos^6(x) - 3\cos^4(x)$ obtenue en remplaçant le $\cos(3x)$ via formule de triplication. On a donc $f'(x) = -24\sin(x)\cos^5(x) + 12\sin(x)\cos^3(x) = 12\sin(x)\cos^3(x)(1-2\cos^2(x)) = -12\sin(x)\cos(2x)\cos^3(x)$. Aucune difficulté pour étudier le signe de ce produit sur notre intervalle I : $\sin(x)$ y est toujours positif, $\cos^3(x)$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$ (positif avant, négatif après) et $\cos(2x)$ change de signe en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ (de façon générale $\cos(2x) = 0$ si $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, donc si $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$). On a déjà calculé $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ un peu plus haut (la fonction étant paire), et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ également (c'est le même calcul, sauf que le signe n'apparait pas au même endroit). On sait déjà que f s'annule en $\frac{\pi}{2}$, ainsi d'ailleurs qu'en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\pi}{6}$ sur notre intervalle I. Enfin, $f(0) = f(\pi) = 1$ (calcul immédiat). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

6. On a déjà signalé que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. De plus, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{9\sqrt{3}}{8}$. En considérant que $3\sqrt{3} \simeq 5$, on trouve une valeur approchée de ce coefficient directeur égale à $-\frac{15}{8}$, donc pas très loin de -2. L'équation de la tangente est accessoirement $y = -\frac{9\sqrt{3}}{8}x + \frac{3\sqrt{3}\pi}{16}$.

7. On a déjà tout ce qu'il faut pour tracer tout celà précisément :



Exercice 3

1. Mettons au même dénominateur : $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}=\frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)}=\frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)}$. Par identification des coefficients, le numérateur ne peut être égal à 1 pour tout entier k que si $a+b=0$ et $2a=1$, soit $a=\frac{1}{2}$ et $b=-a=-\frac{1}{2}$.

2. On en déduit que $S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$ après décalage d'indice dans la deuxième somme. On reconnait là une somme télescopique : $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}$. Inutile de chercher à simplifier plus, cette forme suffit largement à constater que la suite (S_n) admet pour limite $\frac{3}{4}$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On cherche donc à prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}$.

   Au rang 1, la somme de gauche est égale à $\frac{1}{3}$ (il n'y a qu'un seul terme), et le membre de droite vaut $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, donc P_1 est vraie.

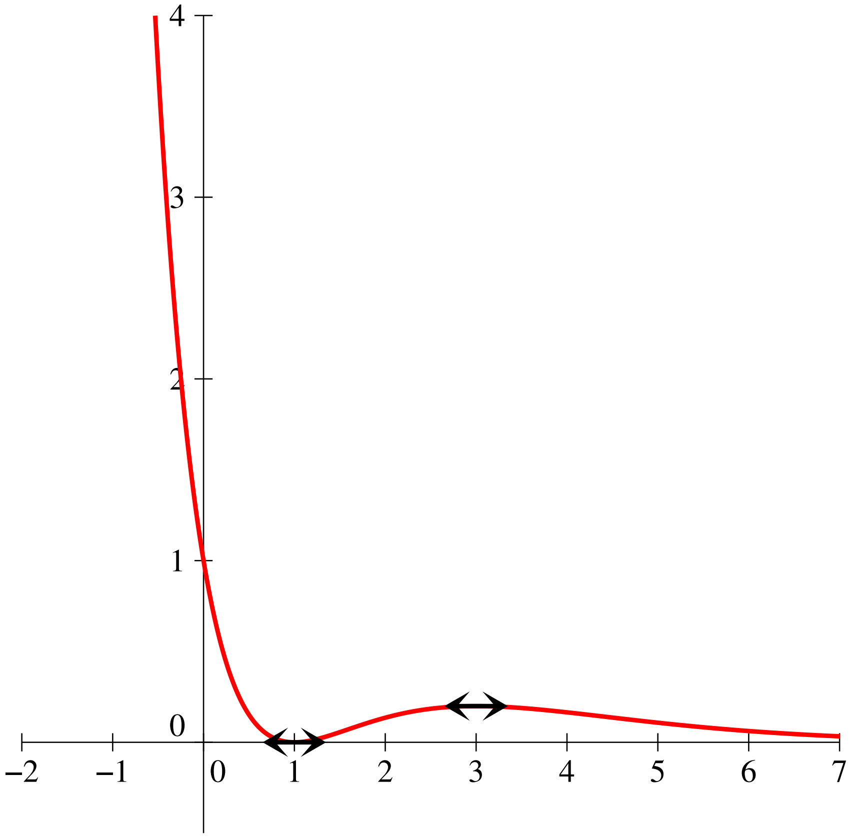
   Supposons maintenant la formule vérifiée au rang n, et écrivons $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+2)}=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$. On remplace S_n en utilisant l'hypothèse de récurrence, et on utilise le calcul de la première question pour obtenir $\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+3)}$. On peut donc écrire $S_{n+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+4} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+6} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2n+4} - \dfrac{1}{2n+6}$, soit exactement la formule attendue pour P_{n+1}. On a donc prouvé l'hérédité de notre récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 4

1. (a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = (x-1)e^{-x}(2-(x-1)) = (x-1)(3-x)e^{-x}$. Le signe de cette dérivée est celui du trinôme $(x-1)(3-x)$, qui est négatif à l'extérieur de ses racines. On calcule en passant $g(1) = 0$ et $g(3) = \dfrac{4}{e^3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée de ce côté). Enfin, $g(x) = x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{-x}$, et chacun des termes de cette somme a une limite nulle en $+\infty$ (par croissance comparée classique pour les deux premiers), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	0

(b) En utilisant la valeur de l'énoncé, $g(3) \simeq \dfrac{1}{5}$. Par ailleurs, $g(0) = 1$, ce qui permet de préciser un peu l'allure de la courbe.



(c) Commençons par préciser que g est continue donc bijective sur chacun des trois intervalles où elle est monotone : elle effectue une bijection de $]-\infty, 1]$ vers $[0, +\infty[$; puis de $]1, 3[$ vers

$\left]0, \frac{4}{e^3}\right[$; et enfin de $[3, +\infty[$ vers $\left]0, \frac{4}{e^3}\right]$ (remarquez que j'ai bien fait exprès de prendre des intervalles disjoints au niveau de l'axe des abscisses). Distinguons maintenant nos cas :

- si $a < 0$, l'équation $g(x) = a$ ne peut pas avoir de solution puisque g ne prend que des valeurs positives.
- si $a = 0$, l'équation admet une seule solution $x = 1$ puisque 0 appartient à un seul des trois intervalles images définis ci-dessus.
- si $a \in \left], \frac{4}{e^3}\right[$, l'équation admet trois solutions, une sur chacun des intervalles définis ci-dessus.
- si $a = \frac{4}{e^3}$, l'équation admet deux solutions : $x = 3$ et une autre solution appartenant à l'intervalle $]-\infty, 1]$.
- si $a > \frac{4}{e^3}$, l'équation admet une seule solution, dans l'intervalle $]-\infty, 1]$ puisque a n'est dans aucun des deux autres intervalles images.

2. Un calcul très simlaire à celui de la limite de g en $+\infty$ (à coup de croissance comparée) permet d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} k(x^2+1)e^{-x} = 0$ (quelle que soit la valeur de k). On a donc $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) - x = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$.
3. On calcule donc $f'_k(x) = 1+2kxe^{-x}-k(x^2+1)e^{-x} = 1-ke^{-x}(x^2-2x+1) = 1-k(x-1)^2e^{-x} = 1-kg(x)$. L'équation $f'_k(x) = 0$ est donc équivalente à $g(x) = \frac{1}{k}$ (dans le cas où $k = 0$, $f_0(x) = x$ et il ne peut bien sûr pas y avoir de tangente horizontale). D'après les résultats de la question 1.c :
   - si $k < 0$, $\frac{1}{k}$ est aussi strictement négatif, et l'équation n'a pas de solution, il n'y a donc pas de tangente horizontale à $\mathcal{C}_k$.
   - si $k = \frac{e^3}{4}$, alors il y a exactement deux tangentes horizontales.
   - si $0 < k < \frac{e^3}{4}$, alors $\frac{1}{k} > \frac{4}{e^3}$ et il y a une tangente horizontale.
   - si $k > \frac{e^3}{4}$, alors $0 < \frac{1}{k} < \frac{4}{e^3}$, et il y aura trois tangentes horizontales.
4. Les points en question ont des coordonnées de la forme $(x, f_k(x))$, avec par ailleurs $f'_k(x) = 0$, donc $g_k(x) = \frac{1}{k}$. Autrement dit, on doit avoir $y = x + k(x^2+1)e^{-x}$, et en même temps $(x-1)^2e^{-x} = \frac{1}{k}$. De la deuxième équation, on déduit que $e^{-x} = \frac{1}{k(x-1)^2}$ (la valeur $x = 1$ ne peut jamais annuler f'_k), donc en remplaçant dans la première équation $y = x + \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)^2 + x^2 + 1}{(x-1)^2}$, ce qui est bien de la forme $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ demandée. Personne n'a fait cette question, mais en fait elle était facile (et rapportait des points, tant pis pour vous !).
5. On remarque que, quelle que soit la valeur de k, $f'_k(1) = 1$, donc toutes ces tangentes ont un même coefficient directeur et son parallèles (mais pas confondues car $f_k(1)$, lui, dépend de k).
6. (a) Calculons donc $f'_k(2) = 1 - ke^{-2}$, et $f_k(2) = 2 + 5ke^{-2}$. On peut alors donner l'équation de la tangente T_k : $y = \left(1 - \frac{k}{e^2}\right)(x-2) + 2 + 5\frac{k}{e^2} = \left(1 - \frac{k}{e^2}\right)x + 7\frac{k}{e^2}$.

   (b) Les droites sont concourantes s'il existe une valeur de x pour laquelle la valeur de y donnée par l'équation de la question précédente est indépendante de k. Il suffit pour celà de prendre $x = 7$ pour éliminer les termes en $\frac{k}{e^2}$ et trouver $y = 7$. Toutes les tangentes T_k passent donc par le point de coordonnées $(7, 7)$. On peut aussi retrouver ce résultat en déterminant l'intersection de deux de ces droites puis en vérifiant que le point appartient aussi à toutes les autres.

Exercice 5

1. Je vous laisse relire votre cours pour la démonstration de ce résultat classique : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

2. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annule jamais puisque ch ne prend que des valeurs strictement positives), de dérivée $u'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \dfrac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)+1}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$ en exploitant en cours de calcul le résultat rappelé à la question précédente. Cette dérivée étant toujours strictement positive, u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, u est une fonction impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire. En passant tout sous forme exponentielle et en multipliant numérateur et dénominateur par 2, on peut écrire $u(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + 2e^{-x} + e^{-2x}}$, ce dont on déduit facilement que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$. Par parité, on en déduit $\lim\limits_{x \to -1} u(x) = -1$ (qu'on peut aussi trouver par un calcul très similaire). Concluons avec un tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u	$-\infty$	0	$+\infty$

3. La fonction arctan étant strictement croissante, les variations de g seront les mêmes que celles de u. Attention tout de même à bien penser à modifier les limites en tenant compte du fait que $\lim\limits_{x \to 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$

4. Calculons donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{2(1+\mathrm{sh}^2(x))}$, ce qui est beaucoup plus intéressant puisque $1 + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)$, donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)}$.

   On peut également simplifier g' de la façon suivante : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} \times \dfrac{1}{1 + (\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)})^2} = \dfrac{1+\mathrm{ch}(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 + \mathrm{sh}^2(x)}$. Or, $\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) - 1$, donc le dénominateur de cette dérivée peut s'écrire $(1+\mathrm{ch}(x))^2 + \mathrm{ch}^2(x) - 1 = 2\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{ch}^2(x) = 2\,\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))$. On en déduit que $g'(x) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)} = f'(x)$. Les deux fonctions sont donc égales à une constante près. Comme $f(0) = g(0) = 0$, elles sont bien égales sur $\mathbb{R}$.

5. (a) On sait que $e^{\frac{\ln(3)}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, et $e^{-\frac{\ln(3)}{2}} = \dfrac{1}{e^{\frac{\ln(3)}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit que $\text{ch}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $\text{sh}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Il faut évidemment les bonnes fonctions pour que ça marche : $f\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$, et $g\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \arctan(2-\sqrt{3})$. Puisque les deux fonctions sont égales, on a donc $\arctan(2-\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{12}$, et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.

6. (a) On doit donc résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$, soit en multipliant tout par e^x, $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. On pose $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et qui admet pour racines $X_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $X_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$. La première de ces deux valeurs étant strictement négative, elle est exclue (puisque $X = e^x$ doit être positif), on ne garde donc comme unique solution que $a = \ln(1+\sqrt{2})$.

(b) Même principe qu'au-dessus : par définition $\text{sh}(a) = 1$, donc $\text{ch}^2(a) = 1 + \text{sh}^2(a) = 2$ et $\text{ch}(a) = \sqrt{2}$ (ça ne peut bien sûr pas être négatif). On en déduit d'une part que $f(a) = \dfrac{1}{2}\arctan(1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8}$; d'autre part que $g(a) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = \arctan(\sqrt{2}-1)$. Conclusion : $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$.