

TD n° 3 : révisions pour le DS2

PTSI B Lycée Eiffel

10 octobre 2019

Exercice 1

Effectuer les calculs suivants (les questions sont indépendantes) :

1. Résoudre l'équation $\cos(4x) + \cos(9x) + \cos(14x) = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n+2} 3^{k-1} 2^{2-k}$.
3. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)$ (on doit trouver une fraction simple comme résultat).
4. Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.
5. On pose $f(x) = |x \ln(|x|)|$. Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle, et le tableau de variations de f (on donnera bien sûr une allure rapide de courbe).

Exercice 2

On pose pour tout cet exercice $f(x) = \cos(3x) \cos^3(x)$.

1. Déterminer un intervalle d'étude I intelligent pour la fonction f .
2. Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. On rappelle que $\cos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer la valeur de $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis étudier les variations de la fonction sur I . On pourra par exemple prouver que $f'(x) = -12 \sin(x) \cos(2x) \cos^3(x)$.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$. Donner une valeur approchée de son coefficient directeur.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de f sur une période complète, en y faisant notamment figurer la tangente calculée à la question précédente.

Exercice 3

On cherche à calculer dans cet exercice la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.
2. En déduire la valeur de S_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Démontrer à nouveau la formule obtenue pour S_n par récurrence.

Exercice 4

On définit dans cet exercice une fonction g par $g(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$, ainsi qu'une famille de fonctions f_k définies par $f_k(x) = x + k(x^2 + 1)e^{-x}$ (où k est un réel quelconque). On notera \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k .

- (a) Étudier les variations de la fonction g , et dresser son tableau de variations complet (limites incluses).
(b) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction g (on précise que $e^3 \simeq 20$).
(c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$ en distinguant des cas suivant la valeur du réel a (on fera un effort particulier de rigueur dans la rédaction pour cette question).
- Expliquer pourquoi les courbes \mathcal{C}_k admettent une asymptote commune en $+\infty$.
- Calculer la dérivée f'_k de la fonction f_k et déterminer en fonction de k le nombre de points où \mathcal{C}_k admet une tangente horizontale (cette question devrait avoir un rapport avec la question 1.c).
- On note Γ la courbe constituée de tous les points où l'une des courbes \mathcal{C}_k admet une tangente horizontale. Montrer que la courbe Γ est incluse dans la courbe représentative d'une fonction h définie par une équation de la forme $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des fonctions polynômiales. Cette question est complètement indépendante des dernières questions de l'exercice.
- Que peut-on dire des tangentes aux courbes \mathcal{C}_k en leur point d'abscisse 1, lorsque k parcourt \mathbb{R} ?
- (a) On note T_k la tangente à la courbe \mathcal{C}_k en son point d'abscisse 2. Déterminer une équation de la droite T_k .
(b) Montrer que les droites T_k sont concourantes en un point M dont on précisera les coordonnées.

Exercice 5

On définit dans cet exercice trois fonctions f , g et u par $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x))$,
 $g(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right)$ et $u(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$.

- Rappeler et démontrer la formule reliant $\operatorname{ch}^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ (oui, c'est une question de cours).
- Étudier les variations de la fonction u et dresser son tableau de variations complet (limites incluses).
- En déduire le tableau de variations de la fonction g (sans calcul de dérivée supplémentaire).
- Calculer les dérivées des fonctions f et g et prouver de façon rigoureuse que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
- (a) Calculer les valeurs de $\operatorname{ch}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$.
(b) En utilisant le fait que $f\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = g\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$, calculer et simplifier la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- (a) Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$. On notera a l'unique solution de cette équation.
(b) En partant de l'égalité $f(a) = g(a)$, déterminer la valeur (qu'on simplifiera au maximum) de la tangente d'un autre angle simple.