TD n$^\text{o}$ 2 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2019

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (questions indépendantes) :

1. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$
2. $|x| + |x-1| + |x-2| \leqslant 6$
3. $e^x + 1 - \dfrac{3}{4}e^{-x} = 0$
4. $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$
5. $(m+1)x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ (on exprimera les éventuelles solutions en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

On considère dans cet exercice les deux nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On cherche à simplifier l'expression de α et β. On pourra bien sûr utiliser dans cet exercice la notation $x^{\frac{1}{3}}$ plutôt que $\sqrt[3]{x}$ si on le souhaite.

1. Encadrer α et β entre deux entiers successifs.
2. Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
3. (a) Rappeler la formule du développement de $(a+b)^3$.
   (b) Exprimer $(\alpha+\beta)^3$ en fonction de α et de β.
   (c) Montrer que le réel $u = \alpha+\beta$ est solution de l'équation du troisième degré $x^3 + 3x - 4 = 0$.
   (d) Résoudre cette équation, et en déduire la valeur de u.
4. En posant $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ et en exploitant les questions précédentes, développer et simplifier $P(x)$.
5. En déduire une équation du second degré dont α et β sont solutions, la résoudre et déterminer des expressions plus simples de α et β.

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+9})$. Déterminer le domaine de définition de f, montrer que f effectue une bijection de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à déterminer, et calculer explicitement la réciproque de f.

Exercice 4

On définit deux fonctions f et g par les équations suivantes : $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$.

1. Préciser le domaine de définition et la parité éventuelle de ces deux fonctions.
2. Effectuer une étude complète de la fonction f (variations et limites, on ne demande pas de courbe pour l'instant).
3. Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f, et étudier son signe. On montrera en particulier que f'' s'annule en deux valeurs opposées a et $-a$.
4. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse a. On admettra au moment de tracer la courbe que la position relative de la courbe et de cette tangente change à l'abscisse a (autrement dit, la tangente « traverse » la courbe à cet endroit).
5. Étudier les variations de la fonction g sur son domaine de définition.
6. Calculer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que $\lim_{x \to 0} g'(x)$. On admettra que ce dernier calcul de limite prouve que la courbe représentative de la fonction g admet à l'origine une tangente verticale.
7. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.
8. Tracer dans un même repère les deux courbes, ainsi que la tangente calculée à la question 4. On veillera naturellement à bien respecter les positions relatives étudiées au cours de l'exercice. On donne la valeur approchée $\dfrac{1}{e} \simeq 0.36$.

Exercice 5

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de ce domaine de définition.
3. Calculer rigoureusement les limites du quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$ (on pourra factoriser par x^2 sous la racine carrée).
4. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x$, et en déduire la présence d'une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, donc on précisera l'équation (on pourra s'inspirer de la question précédente et utiliser un produit par une quantité conjuguée pour le calcul de limite).
5. Étudier de même la présence d'une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
6. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f.
7. Que vaut $\lim_{x \to 0} f'(x)$? Si cette limite est finie, celà prouve que f est dérivable en 0, la valeur de la limite étant égale à $f'(0)$. Que peut-on en déduire sur la courbe de f ?
8. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que de ses asymptotes et tangentes remarquables.