TD n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 septembre 2019

Exercice 1 (5 points)

1. Il s'agit donc de calculer $f(e^{it})$. Essayons d'écrire l'affixe de cette image sous forme algébrique : $f(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it})^2 - e^{it} = \frac{1}{2}e^{2it} - e^{it} = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}i\sin(2t) - \cos(t) - i\sin(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t) + i\left(\frac{1}{2}\sin(2t) - \sin(t)\right)$. Par définition, les partie réelle et imaginaire du nombre complexe obtenue sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M', ce qui revient à poser $x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t)$ et $y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \sin(t)$.
2. En exploitant les parités bien connues des fonctions cos et sin, on obtient immédiatement $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Autrement dit, le point correspondant à la valeur $-t$ du paramètre sera symétrique de M' par rapport à l'axe des abscisses du repère. Comme t varie dans un intervalle $[-\pi, \pi]$ qui est symétrique par rapport à l'origine, l'image de tout l'intervalle $[-\pi, 0]$ pourra être obtenue par symétrie par rapport à (Ox)à partir de celle de l'intervalle $[0, \pi]$.
3. La fonction x est dérivable comme composée de fonction usuelles, et $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $x'(t) = \frac{1}{2} \times (-2\sin(2t)) + \sin(t) = \sin(t) - \sin(2t)$. Or, une formule de trigonomtrie classique affirme que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, ce qui permet d'écrire que $x'(t) = \sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) = \sin(t)(1 - 2\cos(t))$, ce qui est bien la formule donnée dans l'énoncé. Le facteur $\sin(t)$ est toujours positif sur l'intervalle d'étude $[0, \pi]$ (il s'annule aux deux extrémités de l'intervalle, et est strictement positif le reste du temps). Le facteur $1 - 2\cos(t)$ s'annule lorsque $\cos(t) = \frac{1}{2}$, soit $t = \frac{\pi}{3}$ (seule valeur appartenant à l'intervalle d'étude), et il est négatif sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (puisque $\cos(t) \geqslant \frac{1}{2}$ sur cet intervalle) et positif sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Après avoir calculé $x(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$ et $f(\pi) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, on peut donc dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
x	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

4. La fonction y est bien sûr également dérivable sur $[0, \pi]$, et $y'(t) = \cos(2t) - \cos(t)$. On utilise à nouveau une formule de trigonométrie pour simplifier l'expression, en l'occurrence $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, et on obtient donc $y'(t) = 2\cos^2(t) - \cos(t) - 1$. Posons $X = \cos(t)$ pour constater que $y'(t) = 2X^2 - X - 1$. Ce trinôme admet pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et pour racines $X_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1+3}{4} = 1$. Autrement dit, $y'(t)$ s'annule lorsque

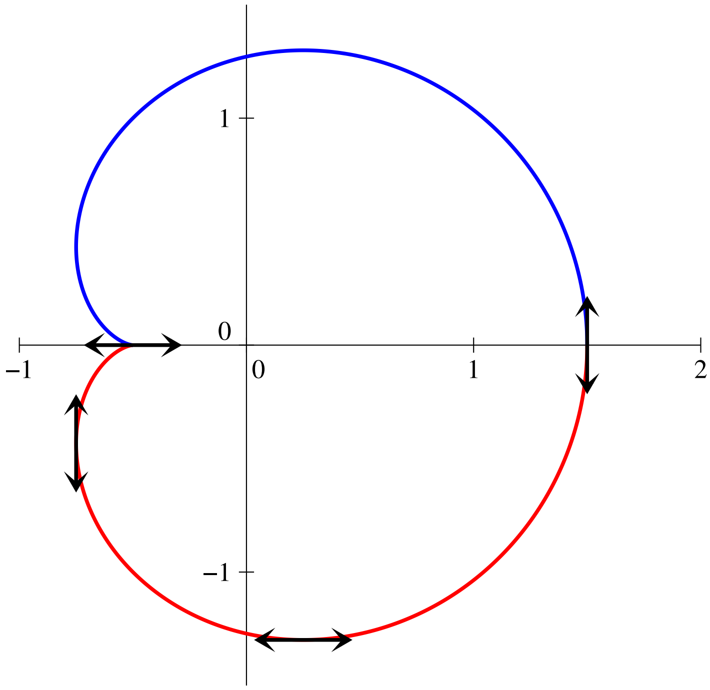
$\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos(t) = 1$, ce qui dans notre intervalle d'étude se produit pour $t = 0$ et $t = \dfrac{2\pi}{3}$. Notre dérivée sera négative sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ puisque la valeur de $\cos(t)$ y est alors comprise entre les deux racines $-\dfrac{1}{2}$ et 1 calculées plus haut. Reste à calculer $y(0) = y(\pi) = 0$ et surtout $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. On conclut avec un tableau de variations :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

5. Pour avoir un tableau complet, on ajoutera les valeurs $x\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ et $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

6. Les tangentes aux points remarquables s'obtiennent tout simplement en regardant les valeurs prises par $x'(t)$ et $y'(t)$ pour la valeur t du paramètre correspondant au point considéré. Si x' s'annule mais pas y', la tangente sera portée par (Oy), donc verticale (c'est le cas pour $t = \dfrac{\pi}{3}$). Au contraire, si y' s'annule mais pas x', la tangente sera horizontale. Notons également, pour faciliter le tracé, que $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0.4$. Voici une allure de la courbe demandée, avec la partie correspondant à l'intervalle $[0, \pi]$ tracée en rouge, et celle correspondant à $[-\pi, 0]$ (obtenue par symétrie) tracée en bleu.



Exercice 2 (5 points)

1. La fonction f est bien définie sur $[0,2]$, de dérivée $f'(t) = \dfrac{2(t+2)-(2t+3)}{(t+2)^2} = \dfrac{1}{(t+2)^2}$. Cette dérivée étant strictement positive, f est strictement croissante sur $[0,2]$. Comme de plus $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{7}{4}$, on en déduit immédiatement l'encadrement demandé.
2. À l'aide de la question précédente, on peut écrire que, $\forall t \in [0,2]$, $\dfrac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$. On peut intégrer ces inégalités entre 0 et 2 pour obtenir $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}\,dt$. Or, les deux intégrales se calculent sans problème : $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\,dt = \frac{3}{2}[ne^{\frac{t}{n}}]_0^2 = \frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$, et de même $\displaystyle\int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}\,dt = \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$, ce qui donne l'encadrement de u_n demandé.
3. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, la limite rappelée dans l'énoncé permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(e^{\frac{2}{n}}-1)}{2} = 1$, ce qui prouve que le membre de gauche de l'encadrement de u_n obtenu à la question précédente converge vers 3, et que le membre de droite de même encadrement converge vers $\dfrac{7}{2}$. Si (u_n) admet une limite finie, cette dernière est donc nécessairement comprise entre 3 et $\dfrac{7}{2}$ (quand deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_n \leqslant v_n$ convergent vers les limites respectives l et l', alors $l \leqslant l'$).
4. La vérification est immédiate en mettant au même dénominateur. On peut alors calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt = \int_0^2 2 - \frac{1}{t+2}\,dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln(4) + \ln(2) = 4 - \ln(2)$.
5. On procède en fait comme à la question 2, mais cette fois en encadrant l'exponentielle : $\forall t \in [0,2]$, $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$ (c'est une conséquence de la croissance de la fonction exponentielle), donc $\dfrac{2t+3}{t+2} \leqslant \dfrac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}} \times \dfrac{2t+3}{t+2}$. On peut intégrer cet encadrement entre 0 et 2 pour

obtenir exactement $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$ (puisque, bien entendu, $e^{\frac{2}{n}}$ est une constate pouvant être sortie de l'intégrale).

6. C'est une simple application du théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$, donc le membre de gauche et le membre de droite de l'encadrement précédent ont pour limite I, ce qui prouve que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = I = 4 - \ln(2)$.

Problème (10 points)

Partie A : étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Il n'y aucune difficulté ici puisque les calculs de limite ne font pas apparaitre de forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. De même, les limites des deux facteurs sont égales à $-\infty$ quand x tend vers 0, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
2. La fonction f est dérivable en tant que somme et produit de fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On peut calculer f' soit en développant toute l'expression de $f(x)$ avant de dériver, soit en dérivant directement le produit donné dans l'énoncé : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$ en utilisant la fonction définie à la question suivante.
3. (a) La fonction u est-elle même dérivable sur $]0, +\infty[$, mais calculer sa dérivée n'est en fait même pas nécessaire, puisque u est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissante (la fonction ln et la fonction $x \mapsto x$) et d'une constante.

   (b) On sait déjà que la fonction u est strictement croissante sur $[2, 3]$, et bien sûr continue. De plus, $u(2) = \ln(2) - 1 \simeq -0.3 < 0$, et $u(3) = \ln(3) \simeq 1.1 > 0$, donc la fonction u s'annule nécessairement sur cet intervalle. L'existence de la solution à l'équation $u(x) = 0$ peut être prouvée à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, mais son unicité nécessite un autre théorème connu sous le nom de théorème de la bijection (et pour lequel la stricte monotonie de la fonction étudiée sur l'intervalle de résolution de l'équation est une hypothèse indispensable). On calcule à la calculatrice $u(2.2) = \ln(2.2) - 0.8 \simeq -0.012$ et $u(2.21) = \ln(2.21) - 0.79 \simeq 0.03$. Ces deux valeurs étant de signe opposé, la fonction u s'annule nécessairement entre les deux, ce qui prouve bien sûr l'encadrement souhaité pour α puisque cette valeur d'annulation est nécessairement égale à α.

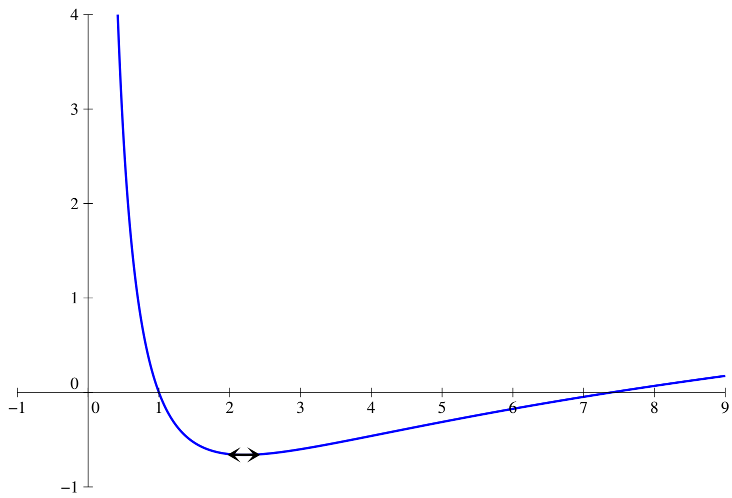
   (c) La fonction u étant strictement croissante, elle sera négative sur $]0, \alpha[$ et positive sur $]\alpha, +\infty[$.
4. (a) L'expression de f' obtenue plus haut prouve que $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, \alpha[$, et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

   (b) Par définition, $u(\alpha) = 0$, donc $\ln(\alpha) + \alpha - 3 = 0$. Autrement dit, $\ln(\alpha) = 3 - \alpha$. On peut remplacer dans l'expression de f pour obtenir $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \alpha) = \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} = -\frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha}$. Or, on sait que $2.2 < \alpha < 2.21$. On en déduit d'une part que $\frac{1}{2.21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2.2}$ (attention à bien changer le sens des inégalités), et d'autre part que $1.2 < \alpha - 1 < 1.21$, donc $1.44 < (\alpha - 1)^2 < 1.4641$. En effectuant le quotient, on peut en déduire l'encadrement suivant (attention aux signes qui changent le sens de certaines inégalités) : $\frac{-1.4641}{2.2} < f(\alpha) < \frac{-1.44}{2.21}$, soit $-0.6655 < f(\alpha) < -0.6516$. Encadrement suffisant pour obtenir une amplitude de 2×10^{-2} comme stipulé dans l'énoncé.

5. (a) On effectue un tableau de signe à partir des deux deux facteurs du produit définissant $f(x)$: $\ln(x) - 2 > 0$ si $x > e^2$ et $1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ est du signe de $x - 1$ sur notre intervalle de définition, donc :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$1 - \frac{1}{x}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln(x) - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Une allure de la courbe $\mathcal{C}$:



Partie B : Étude d'une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

1. (a) Par définition, la dérivée de F est la fonction f dont on a déjà étudié le signe plus haut. La fonction F est donc strictement décroissante sur $[1, e^2]$, et strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]e^2, +\infty[$.

   (b) On sait que le coefficient directeur d'une tangente est donnée par la valeur prise par la dérivée de la fonction au point correspondant. Or, $f(1) = f(e^2) = 0$ (calculs déjà effectués plus haut). Les deux tangentes correspondantes sont donc parallèles et surtout horizontales.

2. (a) Effectuons donc une intégration par parties en posant $v(t) = \ln(t)$, donc $v'(t) = \dfrac{1}{t}$; et $u'(t) = 1$, pour lequel on pourra prendre $u(t) = t$. On obtient alors $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\ dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ dt = t\ln(t) - t + 1$. Notons que la constante 1 est complètement inutile, on se contentera comme primitive de ln de prendre la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$.

   (b) Il s'agit tout bêtement de développer l'expression donnée au début du problème, un calcul que même un élève de Maternelle Petite Section Infantile (parfois aussi appelée MPSI) serait capable d'effectuer sans difficulté.

   (c) Il suffit de « primitiver » terme à terme l'expression obtenue à la question précédente. Pour le morceau $\ln(x)$, on réutilise simplement la question d'avant, pour celui en $\dfrac{\ln(x)}{x}$, on se rend compte qu'il s'agit d'une expression de la forme $u'u$, avec $u(x) = \ln(x)$, qui admet donc une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}u^2$, soit ici $\dfrac{1}{2}\ln^2(x)$. Le reste est facile, on trouve (à une constante près), $F(x) = x\ln(x) - x - \dfrac{1}{2}\ln(x)^2 + 2\ln(x) - 2x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Si on souhaite que notre primitive s'annule en $x = 1$, il faut imposer $k = 3$, soit $F(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln^2(x) + 2\ln(x) - 3x + 3$.

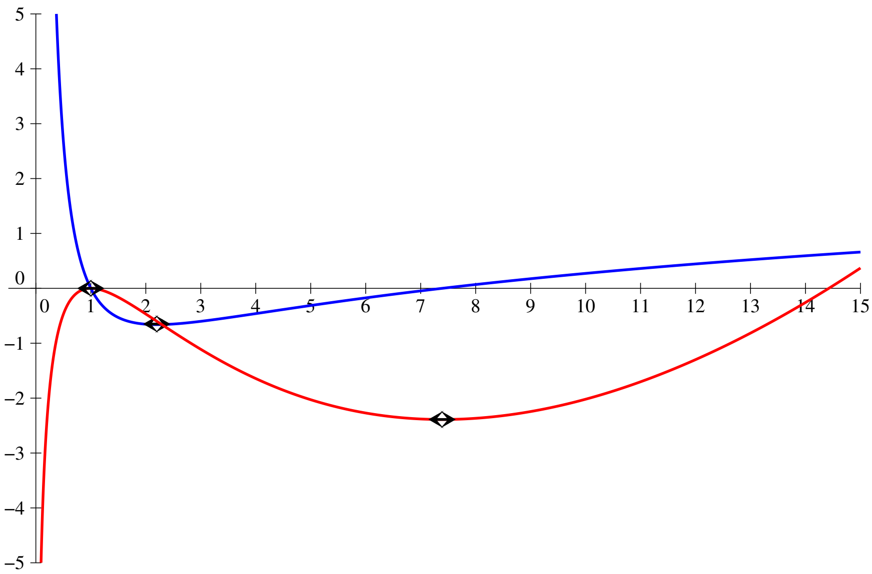
3. (a) Je ne vois vraiment pas ce qu'on peut montrer ici, puisque le résultat de l'énoncé est un des cas classiques de croissance comparée, qui ne se démontrent pas de façon évidente. Contentons-nous de constater que $F(x) = x\ln(x) + \ln(x)\left(2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)\right) + 3 - 3x$, et qu'il n'y a plus de forme indéterminée pour le calcule de limite : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\left(2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3 - 3x = 3$, donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = -\infty$.

   (b) Encore une fois, le premier calcul est évident, il suffit de factoriser l'expression que nous avons obtenue pour $F(x)$, à l'exception de la constante 3, par $x\ln(x)$, et on a tout de suite $F(x) = x\ln(x)\left(1 - \dfrac{3}{\ln(x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2}{x}\right) + 3$. Un autre résultat de croissance comparée classique stipule que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{2x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\ln(x)} = 1$, et la limite demandée en découle facilement (plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) Il n'y a qu'à calculer les valeurs extrêmales pour compléter le tableau : $F(1) = 3 - 3 = 0$ (ce qui est bien sûr normal puisque par définition F s'annule en 1), et $F(e^2) = 2e^2 - \dfrac{4}{2} + 2 \times 2 - 3e^2 + 3 = 5 - e^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$5 - e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) Une allure des deux courbes (la courbe $\mathcal{C}$ en bleu comme précédemment, et la courbe (Γ) en rouge) :



4. Il s'agit en fait simplement de calculer $\displaystyle\int_1^{e^2} f(t)\,dt = [F(t)]_1^{e^2} = F(e^2) = 5 - e^2$. Attention tout de même, l'unité donnée pour le repère étant de 2 cm, il reste à multiplier cette aire par 4 pour la convertir en cm^2, l'aire demandée valant donc $20 - 4e^2$ cm^2.