TD n° 1

PTSI B Lycée Eiffel

3 septembre 2019

Je ne vous le cacherai pas plus longtemps : cet énoncé de TD n'est rien d'autre que le sujet de maths du bac S. Ah oui, pas celui de cette année quand même, on va remonter exactement 20 ans en arrière !

Exercice 1 (5 points)

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M' lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel appartenant à $[-\pi, \pi]$ et M le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = e^{it}$.

1. Montrer que l'image M' de M par f est le point de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t) \\ y(t) & = & \frac{1}{2}\sin(2t) - \sin(t) \end{array} \right.$$

   Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part. En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin(t) \times (1 - 2\cos(t))$, étudier les variations de x sur $[0, \pi]$.
4. Étudier de même les variations de y sur $[0, \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0, \pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\, dt$.

1. En posant $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, étudier sur l'intervalle $[0, 2]$ les variations de la fonction f. En déduire que, pour tout réel t appartenant à $[0, 2]$, on a $\frac{3}{2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{7}{4}$.
2. En déduire que $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.
3. On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Montrer que, si (u_n) possède une limite finie l, alors $3 \leqslant l \leqslant \frac{7}{2}$.

4. Vérifier que $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$, et déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$.
5. Montrer que $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} \times I$.
6. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite l.

Problème (10 points)

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On prendra 2 cm comme unité sur les deux axes.

Partie A : étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.
   (a) Étudier les variations de u.
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2,3]. Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.
   (c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0, +\infty[$.
4. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Exprimer $\ln(\alpha)$ comme polynôme en α. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. (a) Étudier le signe de $f(x)$.
   (b) Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B : Étude d'une promitive de f sur $]0, +\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.
   (b) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
   (a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$ (on pourra faire une intégration par parties).
   (b) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x) = \ln(x) - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$.
   (c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. (a) Montrer que $\lim_{x\to 0}(x\ln(x)) = 0$. En déduire la limite de F en 0.
   (b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1, on a $F(x) = x\ln(x)\left(1 - \dfrac{\ln x}{2x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\ln(x)}\right) + 3$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation de F.
   (d) Tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathcal{C})$.
4. Calcul d'une aire
   Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.