Interrogation Écrite n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 avril 2020

Exercice 1

1. Commençons déjà par constater que notre souris mettra au maximum 5 essais pour trouver son fromage, puisqu'elle ne retente jamais deux fois le même chemin (si c'est un mauvais chemin elle en essaiera un autre, si c'est le bon on arrêtera l'expérience), donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La probabilité que notre souris trouve le bon chemin du premier coup est manifestement égale à $\frac{1}{5}$ puisqu'elle choisit son chemin au hasard. La probabilité qu'elle trouve le bon chemin au deuxième essai vaut en fait aussi $\frac{1}{5}$: elle doit se tromper au premier essai (probabilité $\frac{4}{5}$) puis trouver le bon chemin parmi quatre restants au deuxième essai avec probabilité $\frac{1}{4}$, donc $P(X = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$. De même, on aura $P(X = 3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$, et des calculs similaires donnent aussi $P(X = 4) = \frac{1}{5}$ puis $P(X = 5) = \frac{1}{5}$. La variable X suit donc une loi uniforme $\mathcal{U}(1, 2, 3, 4, 5)$. C'est en fait tout à fait logique : la souris choisit simplement un ordre aléatoire sur les cinq chemins possibles (en s'arrêtant en cours de route si elle trouve le fromage, mais peu importe, les probabilités seraient les mêmes si elle continuait dans tous les cas jusqu'à avoir testé les cinq chemins), la position dans laquelle apparait le bon chemin a logiquement la même probabilité pour chacune des cinq possibilités. Bref :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

   Comme on nous interdisait d'utiliser le cours pour donner l'espérance de cette loi uniforme, refaisons le calcul : $E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$, ce qui parait tout à fait logique.

2. Puisqu'on interdit à la souris de se faire torturer plus de quatre fois, on aura comme précédemment $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Toujours comme précédemment, on a bien sûr $P(Y = 1) = \frac{1}{5}$. Par contre les choses vont changer à partir du deuxième essai à cause de l'absence de mémoire de la souris. On aura donc cette fois $P(Y = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ (il faut toujours tout de même que la souris rate son premier essai, mais elle a moins de chances qu'avant de réussir le second). De même, $P(Y = 3) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$, puis $P(Y = 4) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$. Enfin, on pose $Y = 5$ si la souris s'est plantée aux quatre premiers essais, donc $P(Y = 5) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$. On peut aussi trouver cette dernière probabilité en passant au complémentaire, puisque la somme des cinq probabilités calculées doit bien sûr être égale à 1. Aucune loi usuelle à reconnaitre ici :

k	1	2	3	4	5
$P(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{125}$	$\frac{64}{625}$	$\frac{256}{625}$

On calcule bien sûr notre espérance à la main : $E(Y) = \dfrac{1 \times 125 + 2 \times 100 + 3 \times 80 + 4 \times 64 + 5 \times 256}{625} = \dfrac{2\,101}{625}$. Non, ça ne se simplifie pas du tout, mais une calculatrice permet de vérifier que $E(Y) \simeq 3.36$, ce qui est tout à fait logiquement plus grand que pour la souris qui avait de la mémoire (et encore, le fait de donner le morceau de fromages après quatre échecs diminue l'écart entre les deux ; si on autorisait un nombre d'essais illimités à la souris sans mémoire, on obtiendrait en fait une espérance égale à 5, vous apprendrez à faire ce genre de calcul l'an prochain).

3. Pour la dernière souris, on aura toujours $Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $P(Z = 1) = \dfrac{1}{5}$. Le deuxième essai se déroule comme pour la souris avec mémoire : $P(Z = 2) = \dfrac{1}{5}$. À partir du troisième, ça se complique un peu, la souris a une probabilité $\dfrac{4}{5}$ de se tromper au premier essai, mais seulement $\dfrac{3}{4}$ au deuxième essai (elle se souvient du premier), et a une probabilité $\dfrac{1}{4}$ de trouver son fromage au troisième essai (elle se souvient du deuxième essai mais pas du premier), donc $P(Z = 3) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$. De même, on calcule $P(Z = 4) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{80}$. Enfin, la souris rate ses quatre premiers essais avec une probabilité $\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$, donc $P(Z = 5) = \dfrac{27}{80}$.
En résumé :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{27}{80}$

Dernier calcul d'espérance : $E(Z) = \dfrac{1 \times 16 + 2 \times 16 + 3 \times 12 + 4 \times 9 + 5 \times 27}{80} = \dfrac{255}{80} \simeq 3.19$.
Là encore, pas de surprise, cette espérance est comprise entre celles de X et de Y.

Exercice 2

1. C'est essentiellement évident, mais faisons quand même une preuve rigoureuse de la linéarité : en posant $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, on a $f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = (3(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z'), -6(\lambda x + \mu x') + 9(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z'), -6(\lambda x + \mu x') + 6(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z')) = \lambda(3y - 2z, -6x + 9y - 4z, -6x + 6y - z) + \mu(3y' - 2z', -6x' + 9y' - 4z', -6x' + 6y' - z') = \lambda f(u) + \mu f(v)$, ce qui prouve la linéarité de f. L'espace d'arrivée de f étant par ailleurs le même que son espace de départ, c'est bien un endomorphisme.
2. Pas d'autre choix que de calculer explicitement f^2. En posant $X = 3y - 2z$, $Y = -6x + 9y - 4z$ et $Z = -6x + 6y - z$, on calcule donc $f^2(x, y, z) = f(X, Y, Z) = (3Y - 2Z, -6X + 9Y - 4Z, -6X + 6Y - Z) = (3(-6x + 9y - 4z) - 2(-6x + 6y - z), -6(3y - 2z) + 9(-6x + 9y - 4z) - 4(-6x + 6y - z), -6(3y - 2z) + 6(-6x + 9y - 4z) - (-6x + 6y - z)) = (-6x + 15y - 10z, -30x + 39y - 20z, -30x + 30y - 11z)$. Par ailleurs, $(5f - 6\,\mathrm{id})(x, y, z) = 5(3y - 2z, -6x + 9y - 4z, -6x + 6y - z) - 6(x, y, z) = (-6x + 15y - 10z, -30x + 39y - 20z, -30x + 30y - 11z)$. Les deux formules sont les mêmes, on a bien $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{id}$.
   On peut écrire cette égalité autrement : $5f - f \circ f = 6\,\mathrm{id}$, donc $f \circ \left(\dfrac{5}{6}\,\mathrm{id} - \dfrac{1}{6}f\right) = \mathrm{id}$. Ceci suffit à prouver que l'application f est bijective (et donc un automorphisme de E), et que sa réciproque est $f^{-1} = \dfrac{5}{6}\,\mathrm{id} - \dfrac{1}{6}f$.
3. Il ne faut surtout pas utiliser le calcul explicite avec les coordonnées, ce serait se compliquer énormément la vie sans raison. On écrit simplement que $f \circ p = f \circ (3\,\mathrm{id} - f) = 3f - f^2 = 3f - (5f - 6\,\mathrm{id}) = 6\,\mathrm{id} - 2f = 2(3\,\mathrm{id} - f) = 2p$ (calcul rigoureusement identique si on compose dans l'autre sens). De même, $f \circ q = f \circ (f - 2\,\mathrm{id}) = f^2 - 2f = 5f - 6\,\mathrm{id} - 2f = 3f - 6\,\mathrm{id} = 3(f - 2\,\mathrm{id}) = 3q$ (et pareil en composant dans l'autre sens).

4. On prouve cette propriété par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, on a $3^0 q + 2^0 p = q + p = f - 2\,\mathrm{id} + 3\,\mathrm{id} - f = \mathrm{id} = f^0$, donc la propriété est vérifiée. Si on la suppose vraie au rang n, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (3^n q + 2^n p) = 3^n f \circ q = 2^n f \circ p = 3^{n+1} q + 2^{n+1} p$ en exploitant simplement les résultats obtenus à la question précédente. L'hérédité est donc prouvée, et la propriété vraie pour tout entier naturel n.

5. Calculons donc ce à quoi « devrait » être égale f^{-1} en appliquant la formule pour $n = -1$: $\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}p = \frac{1}{3}(f - 2\,\mathrm{id}) + \frac{1}{2}(3\,\mathrm{id} - f) = \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\,\mathrm{id} + \frac{3}{2}\,\mathrm{id} - \frac{1}{2}f = \frac{5}{6}\,\mathrm{id} - \frac{1}{6}f$, c'est-à-dire exactement la formule obtenue à la question 2 pour f^{-1}. La relation reste donc vraie lorsque $n = -1$.

   Effectuons le calcul pour $n = -2$: $\frac{1}{9}q + \frac{1}{4}p = \frac{1}{9}f - \frac{2}{9}\,\mathrm{id} + \frac{3}{4}\,\mathrm{id} - \frac{1}{4}f = \frac{19}{36}\,\mathrm{id} - \frac{5}{36}f$. Reste à vérifier si ça correspond à f^{-2}. Pour cela, le plus simple est de calculer $f^{-2} = (f^{-1})^2 = \left(\frac{5}{6}\,\mathrm{id} - \frac{1}{6}f\right)^2 = \frac{25}{36}\,\mathrm{id} - \frac{10}{36}f + \frac{1}{36}f^2 = \frac{25}{36}\,\mathrm{id} - \frac{10}{36}f + \frac{1}{36}(5f - 6\,\mathrm{id}) = \frac{19}{36}\,\mathrm{id} - \frac{5}{36}f$. Les deux formules coïncident à nouveau, la relation est aussi valable pour $n = -2$.

6. Pour calculer F, on cherche les vecteurs $u(x, y, z)$ vérifiant $f(u) = 3u$, donc on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 3y & - & 2z & = & 3x \\ -6x & + & 9y & - & 4z & = & 3y \\ -6x & + & 6y & - & z & = & 3z \end{array}\right.$. Les deux dernières équations du systèmes sont en fait identiques, et la première aussi, à un facteur 2 près. On ne garde donc par exemple que la condition $2z = 3y - 3x$, soit $z = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x$, donc $F = \mathrm{Vect}\left(\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)\right)$.

   De même, on calcule G en cherchant les vecteurs vérifiant $f(u) = 2u$, donc en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 3y & - & 2z & = & 2x \\ -6x & + & 9y & - & 4z & = & 2y \\ -6x & + & 6y & - & z & = & 2z \end{array}\right.$, soit encore $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 6x & - & 7y & + & 4z & = & 0 \\ 6x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. La soustraction des deux dernières lignes donne $z - y = 0$, soit $z = y$. Les trois équations se réduisent alors à la même condition $2x - y = 0$, donc $y = z = 2x$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 2))$. Les deux sous-espaces F et G sont de dimension respective 2 et 1, donc la somme de leurs dimensions est bien égale à celle de E. De plus, le vecteur $u = (1, 2, 2)$ n'appartient pas à F (il vérifie $f(u) = 2u$ et ne peut donc pas vérifier en même temps $f(u) = 3u$), ce qui suffit à prouver que $F \cap G = \{0\}$. Les deux sous-espaces F et G sont donc bien supplémentaires dans E.

7. Il suffit de calculer $p^2 = (3\,\mathrm{id} - f)^2 = 9\,\mathrm{id} - 6f + f^2 = 9\,\mathrm{id} - 6f + 5f - 6\,\mathrm{id} = 3\,\mathrm{id} - f = p$ pour prouver que p est un projecteur. De même, $q^2 = (f - 2\,\mathrm{id})^2 = f^2 - 4f + 4\,\mathrm{id} = 5f - 6\,\mathrm{id} - 4f + 4\,\mathrm{id} = f - 2\,\mathrm{id} = q$, donc q est aussi un projecteur.

   On connait déjà les noyaux des deux projecteurs, et il est en fait superflu de calculer leurs images. En effet, si on est bien réveillés, on constate que $q = \mathrm{id} - p$, donc q est simplement le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(p) = \ker(q) = G$ et $\mathrm{Im}(q) = \ker(p) = F$. L'applciation p est donc un projecteur sur F parallèlement à G, et q un projecteur sur G parallèlement à F.

8. On utilise bien entendu la formule du cours : $s = 2q - \mathrm{id}$ (attention à bien prendre le bon projecteur), donc $s = 2(f - 2\,\mathrm{id}) - \mathrm{id} = 2f - 5\,\mathrm{id}$. On en déduit directement que $q(x, y, z) = 2f(x, y, z) - 5(x, y, z) = (-5x + 6y - 4z, -12x + 13y - 8z, -12x + 12y - 7z)$. Les (très) courageux vérifieront s'ils le souhaitent que $s \circ s = \mathrm{id}$.