NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

17 avril 2020

Exercice 1

Un laboratoire effectue des expériences sur des souris. Chaque souris est placée au centre d'un labyrinthe constitué de cinq chemins différents : l'un d'entre eux mène à un morceau de fromage, les quatre autres au moyen de torture de votre choix (qui doit tout de même laisser la souris en état de retenter sa chance). On étudie le nombre d'essais nécessaires à la souris pour trouver son morceau de fromage.

Aucune connaissance concernant les lois usuelles n'est attendue dans cet exercice. Si on tombe par hasard sur une variable aléatoire suivant une de ces lois, on recalculera donc son espérance « à la main ».

1. La première souris testée n'a aucun odorat (elle teste à chaque fois un chemin au hasard parmi ceux qui restent) mais une très bonne mémoire : elle ne retentera jamais un chemin l'ayant amenée à être torturée. On note X le nombre d'essais qu'elle effectue pour trouver le fromage. Donner l'ensemble des valeurs prises par X, puis la loi de X et son espérance.
2. La deuxième souris n'a toujours pas d'odorat, mais pas de mémoire non plus, elle retente au hasard un chemin parmi les cinq à chaque nouvel essai. On note Y son nombre de tentatives, et comme on est généreux, si la souris n'a toujours pas trouvé son morceau de fromage après quatre tentatives, on lui donne et on considère que $Y = 5$. Donner comme précédemment la loi de Y et son espérance.
3. La dernière souris est une souris « type PTSI B » qui a un peu de mémoire, mais à très court terme (et toujours pas d'odorat) : si elle est torturée, elle ne reprendra pas le même chemin à la tentative suivante, mais elle aura oublié à celle d'après et pourra donc retenter le chemin deux essais plus tard (ainsi, si elle n'a pas eu le fromage lors de ses deux premiers essais, elle ne retentera pas le deuxième chemin au troisième essai, mais elle peut très bien reprendre le premier). On note Z son nombre d'essais, et comme pour la souris précédente, on lui donnera le bout de fromage (et on posera $Z = 5$) après quatre essais si elle ne l'a pas encore trouvé. Comme vous pouvez vous en douter, on aimerait connaitre la loi et l'espérance de Z.

Exercice 2

On se place pour tout l'exercice dans $E = \mathbb{R}^3$, on note f l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (x,y,z) & \mapsto & (3y-2z, -6x+9y-4z, -6x+6y-z) \end{array} \right.$$

.

On pose également $p = 3\,\mathrm{id} - f$ et $q = f - 2\,\mathrm{id}$. On note comme d'habitude $f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n\ fois}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{id}$. En déduire que f est en fait un automorphisme de E, et déterminer sa réciproque f^{-1} (on pourra se contenter d'exprimer f^{-1} en fonction de f et de id).
3. Montrer que $f \circ p = p \circ f = 2p$ et $f \circ q = q \circ f = 3q$.
4. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 3^n q + 2^n p$.
5. Vérifier que la relation précédente reste valable pour $n = -1$. Est-elle aussi vraie lorsque $n = -2$?
6. Calculer $F = \ker(p)$ et $G = \ker(q)$, puis prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
7. Montrer que p et q sont en fait des projecteurs, et préciser leurs éléments caractéristiques.
8. Donner l'expression explicite (en fonction des coordonnées (x,y,z)) de la symétrie s par rapport à G parallèlement à F.