Interrogation Écrite n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

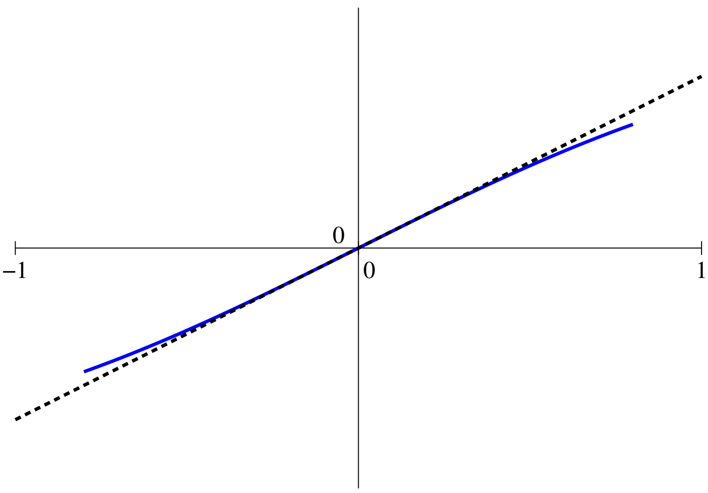
23 mars 2020

1. Il faut simplement ici faire attention à mener suffisamment loin le calcul de développement limité du numérateur pour pouvoir conclure correctement : $\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, donc $x^2 - \sin^2(x) = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$ et $\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3} = \frac{1}{3}x + o(x)$, ce qui suffit bien sûr à prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3} = 0$.
2. Soit on est très observateur et on remarque immédiatement une combinaison linéaire reliant les trois polynômes de la famille, soit non et on revient aux définitions. Vérifions si la famille est libre (ce qui est équivalent au fait qu'il s'agisse d'une base puisque c'est une famille de trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3) en partant de la condition $a(X^2 - X + 2) + b(3X^2 - 2X + 4) + c(2X^2 - 3X + 6) = 0$. En regroupant les termes de même degré, cette condition est équivalente au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & + & 2c & = & 0 \\ -a & - & 2b & - & 3c & = & 0 \\ 2a & + & 4b & + & 6c & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières lignes du système sont identiques (à un facteur -2 près) donc le système ne peut pas être un système de Cramer et la famille n'est pas libre. Résolvons quand même le système en ne gardant que les deux premières équations : $a = -3b - 2c = -2b - 3c$, donc $c - b = 0$ et $c = b$, ce qui implique $a = -5b$. Autrement dit, le triplet $(-5, 1, 1)$ est une solution non triviale du système. Ceci implique que, par exemple, $2X^2 - 3X + 6 = 5(X^2 - X + 2) - (3X^2 - 2X + 4)$. Une fois supprimé le troisième vecteur de la famille initiale, la famille $(X^2 - X + 2, 3X^2 - 2X + 4)$ est libre (les deux polynômes restants ne sont pas proportionnels). On peut donc la compléter en une base de $\mathbb{R}_2[X]$ en lui ajoutant un élément (puisqu'une base de cet espace est forcément constituée de trois vecteurs) choisi par exemple dans la base canonique $(1, X, X^2)$. Regardons se la famille $(X^2 - X + 2, 3X^2 - 2X + 4, 1)$ est une famille libre, en résolvant de façon similaire à ce qu'on a fait plus haut le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & & & = & 0 \\ -a & - & 2b & & & = & 0 \\ 2a & + & 4b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux premières équations impliquent $a = -3b = -2b$, donc $a = b = 0$ et alors on a $c = 0$ donc la famille est libre. Étant constituée de trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, qu'on notera $\mathcal{B}$ pour la fin de l'exercice.

   Pour déterminer les coordonnées de $X^2 - 1$ dans la base $\mathcal{B}$, on cherche trois réels a, b et c, tels que $X^2 - 1 = a(X^2 - X + 2) + b(3X^2 - 2X + 4) + c$, ce qui revient encore une fois à résoudre un petit système (très similaire au précédent) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & & & = & 1 \\ -a & - & 2b & & & = & 0 \\ 2a & + & 4b & + & c & = & -1 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $a = -2b$, et quand on reporte cette condition dans la première on a $-2b + 3b = 1$, donc $b = 1$ et $a = -2$. Il ne reste plus qu'à exploiter la dernière équation : $c = -1 - 2a - 4b = -1$. Conclusion : $X^2 - 1 = (-2, 1, -1)_{\mathcal{B}}$.
3. Pour obtenir toutes les information nécessaires, il faudra effectuer un developpement limité de f (au moins) à l'ordre 2 en 0, ce qui nécessite si on anticipe un peu de calculer initialement

un developpement limité à l'ordre 3 du dénominateur. En effet, $e^x - e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$. On peut poser $u = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$, variable qui va tendre vers 0 quand x tend vers 0, et on obtiendra alors $f(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$. Ce développement limité de f permet d'affirmer :

- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0.
- $f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2}x + o(x)$, la présence de développement limité à l'ordre 1 prouve que le prolongement de f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$. Si on préfère, la courbe aura au point de prolongement une tangente d'équation $y = \frac{x}{2}$.
- $f(x) - \frac{x}{2} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^3}{12}$, ce qui prouve que $f(x) - \frac{x}{2}$ est négatif au voisinage « droit » de 0, et positif au voisinage « gauche » de 0. La tangente traverse la courbe en 0, on a à cet endroit un point d'inflexion.



4. (a) Puisqu'on a quatre inconnues et seulement deux équations, le mieux qu'on puisse faire est d'exprimer deux des inconnues en fonction des deux autres, par exemple $t = -y - 2z$, puis $x = -y - z - t = z$, donc $F = \{(x, y, x, -y - 2x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, soit $F = \text{Vect}((1, 0, 1, -2); (0, 1, 0, -1))$. En particulier F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$, et $((1, 0, 1, -2); (0, 1, 0, -1))$ en est une base (les deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc la famille est libre).

   (b) Soit $u = (x, y, z, t) \in F \cap G$, alors, comme u appartient à G, $u = a(1, 1, 1, 1) + b(1, 0, 1, 0) = (a+b, a, a+b, a)$. Si on veut en plus que u appartienne à F, il doit vérifier les deux équations définissant F, soit $a + b + a + a + b + a = a + 2a + 2b + a = 0$, ce qui donne dans les deux cas $4a + 2b = 0$, soit $b = -2a$. Autrement dit $u = a(1, 1, 1, 1) - 2a(1, 0, 1, 0) = a(-1, 1, -1, 1)$, et $F \cap G = \text{Vect}((-1, 1, -1, 1))$. Cet unique vecteur forme bien sûr une base de $F \cap G$, qui est donc de dimension 1. La formule de Grassmann permet alors d'affirmer que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$. Comme le premier vecteur constituant notre base de G, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$, n'appartient pas à F (il ne vérifie aucune des deux équations définissant F, il ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux vecteurs constituant la bse que nous avons obtenue de F, et la famille

$((1,0,1,-2);(0,1,0,-1),(1,1,1,1))$ est donc une famille libre constituée de trois vecteurs de $F+G$. Comme cet espace est de dimension 3, cette famille est nécessairement une base de $F+G$.

Les deux sous-espaces ne sont bien entendu pas supplémentaires, leur intersection n'est pas réduite à $\{0\}$ et leur somme n'est pas égale à $\mathbb{R}^4$ tout entier.

(c) Les deux sous-espaces F et H sont de dimension 2. De plus, si $u=(x,y,z,t)\in H$, alors $u=a(1,1,1,1)+b(1,1,0,0)=(a+b,a+b,a,a)$. Si u appartient également à F, il doit donc vérifier $a+b+a+b+a+a=a+b+2a+a=0$, soit $4a+2b=4a+b=0$, ce qui implique $b=0$ puis $a=0$. Autrement dit $F\cap H=\{0\}$, ce qui combiné à la remarque que $\dim(F)+\dim(H)=2+2=4$, suffit à affirmer que H et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(d) Il y avait une erreur d'énoncé manifeste que vous aviez tout remarquée, le vecteur f doit appartenir à F et pas à G. On cherche donc $h=(a+b,a+b,a,a)$ et $f=c(1,0,1,-2)+d(0,1,0,-1)=(c,d,c,-2c-d)$ tels que $f+h=(1,2,3,4)$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & & & = & 1 \\ a & + & b & & & + & d & = & 2 \\ a & & & + & c & & & = & 3 \\ a & & & - & 2c & - & d & = & 4 \end{array}\right.$. En soustrayant la troisième équation à la première, on a immédiatement $b=-2$. On en déduit $a+c=3$, soit $c=3-a$; et $a+d=4$, soit $d=4-a$. On remplace tout dans la dernière équation : $a-6+2a-4+a=4$, soit $4a=14$, donc $a=\dfrac{7}{2}$, puis $c=-\dfrac{1}{2}$ et $d=\dfrac{1}{2}$. On en déduit donc que $h=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2},\dfrac{7}{2}\right)$ et $f=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.