Interrogation Écrite n° 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 janvier 2020

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 4L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et pour racines $r_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. On met aisément r_1 sous forme exponentielle : $|r_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $r_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(A\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right) \times (\sqrt{2})^n$. Il ne reste plus qu'à calculer les valeurs de ces constantes à l'aide des conditions initiales : $u_0 = 1$ implique $A = 1$, et $u_1 = 1$ donne $\left(A\dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 1$, soit $A + B = 1$ et donc $B = 0$. On en déduit tout simplement que $u_n = \sqrt{2}^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

3. (a) Un calcul immédiat donne $P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3P$. On en déduit que $PQ = \frac{1}{4}P(I_3 + P) = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P = P$. On obtient de même $QP = P$.

(b) Là encore, autant faire un calcul formel (les matrices I_3 et P commutent bien entendu) : $Q^2 = \frac{1}{16}(I_3 + 2P + P^2) = \frac{1}{16}I_3 + \frac{5}{16}P$. Or, $P = 4Q - I_3$, donc $Q^2 = \frac{1}{16}I_3 + \frac{5}{4}Q - \frac{5}{16}I_3 = \frac{5}{4}Q - \frac{1}{4}I_3$ (on peut bien sûr également trouver cette relation par un calcul direct).

On déduit de ce calcul que $4Q^2 - 5Q = -I_3$ ou encore que $Q(5I_3 - 4Q) = I_3$, ce qui prouve que la matrice Q est inversible, et que $Q^{-1} = 5I_3 - 4Q = 4I_3 - (4Q - I_3) = 4I_3 - P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) On va bien sûr procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ (puisque $Q^0 = I_3$) et au rang 1 en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ (la double initialisation est superflue pour la récurrence mais servira ensuite). Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, alors on peut écrire $Q^{n+1} = Q \times Q^n = Q(a_nI_3 + b_nQ) = a_nQ + b_nQ^2 = a_nQ + \frac{5}{4}b_nQ - \frac{1}{4}b_nI_3 = \left(a_n + \frac{5}{4}b_n\right)Q - \frac{1}{4}b_nI_3$. Ceci prouve la propriété au rang $n+1$, et en même temps les relations de récurrence $b_{n+1} = a_n + \frac{5}{4}b_n$ et $a_{n+1} = -\frac{1}{4}b_n$.

(d) ON peut par exemple écrire $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{5}{4}b_{n+1} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{1}{4}b_n$ pour reconnaitre une suite récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{1}{4}$ admet pour discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$, et pour racines $r_1 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{4}$. On en déduit l'existence de deux constantes réelles A et B telles que $b_n = A + \frac{B}{4^n}$. Les conditions initiales imposent que $A + B = 0$ (puisque $b_0 = 0$) et $A + \frac{1}{4}B = 1$ (puisque $b_1 = 1$), donc $A = \frac{4}{3}$ et $B = -\frac{4}{3}$. Autrement dit, on a $b_n = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)$, et on en déduit immédiatement que $a_n = -\frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}} - 1\right)$. Bien entendu, on peut alors écrire $Q^n = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)Q + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}} - 1\right)I_3$, qu'on ne cherchera pas à expliciter plus (ça ne sert vraiment à rien).

(e) La formule appliquée en posant $n = -1$ donne $Q^{-1} = \frac{1}{3}(4-16)Q + \frac{1}{3}(16-1)I_3 = 5I_3 - 4Q$, ce qui correspond exactement à la formule trouvée à la question *b*. Remarquons d'ailleurs que la formule obtenue pour Q^n serait en fait valable pour n'importe quel entier relatif n.

(f) C'est une récurrence très facile : au rang 1, on a $P^1 = 3^0P$ qui est évidemment vérifiée, et en supposant $P^n = 3^{n-1}P$, alors $P^{n+1} = 3^{n-1}P^2 = 3^{n-1} \times 3P = 3^nP$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

(g) Les matrices I_3 et P commutent, on peut donc leur appliquer le binôme de Newton : $(P + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k$. On applique la formule démontrée à la question précédente, mais attention, celle-ci ne fontionne que pour $n \geq 1$, il faut donc isoler le premier terme de la somme : $(P+I_3)^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}P = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k\right)P$. La somme à l'intérieur de la parenthèse est elle-même pratiquement une somme de type « binôme de Newton », il ne lui manque que le terme numéro 0 (qui vaudrait 1) pour être égale à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} = (3+1)^n = 4^n$. Autrement dit, $(P+I_3)^n = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)P$. Comme $Q = \frac{1}{4}(P + I_3)$, on en déduit donc que $Q^n = \frac{1}{4^n}(P+I_3)^n = \frac{1}{4^n}I_3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}\right)P$. En remplaçant P par $4Q - I_3$, on retrouve $Q^n = \frac{1}{4^n}I_3 + \frac{4}{3}Q - \frac{1}{3 \times 4^{n-1}}Q - \frac{1}{3}I_3 + \frac{1}{3 \times 4^n}I_3$, ce qui est bien la formule otenue précédemment.