NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 4

PTSI B Lycée Eiffel

6 janvier 2020

1. Calculer à l'aide du pivot de Gauss l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

3. On définit pour cet exercice les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{4}(I_3 + P)$.
   (a) Calculer P^2, PQ et QP en fonction de P.
   (b) Exprimer Q^2 à l'aide de Q et de I_3, et en déduire que la matrice Q est inversible (on donnera explicitement Q^{-1}).
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $Q^n = a_n I_3 + b_n Q$.
   (d) Calculer explicitement a_n puis b_n. En déduire Q^n.
   (e) La formule obtenue pour Q^n reste-t-elle valable pour $n = -1$?
   (f) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $P^n = 3^{n-1}P$.
   (g) Retrouver la formule pour Q^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.