Interrogation Écrite n^{o} 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 novembre 2019

1. On intègre directement, c'est une simple fonction puissance :
$I_1 = \int_1^2 x\sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{5} \times 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} = \frac{8\sqrt{2}-2}{5}$.

2. On va recourir à une IPP en posant $u(t) = \ln(t)$, et donc $u'(t) = \frac{1}{t}$; et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, ce qui permet par exemple de prendre $v(t) = -\frac{1}{t}$. Les deux fonctions u et v sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration :
$I_2 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\ dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{t^2}\ dt = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.

3. C'est une intégration directe puisqu'on reconnait sous l'intégrale une forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, qui est à un facteur 2 près la dérivée de $\sqrt{u}$:
$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x) \times \sqrt{\tan(x)}}\ dx = [2\sqrt{\tan(x)}]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{\sqrt{3}}$.

4. Puisqu'on nous l'impose, posons donc $x = \sqrt{t}$, ou si on préfère $t = x^2$ (ce qui ne pose pas de problème sur l'intervalle $[0, \pi^2]$). Les bornes de l'intégrale vont devenir égales à 0 et π, et l'élément différentiel vérifiera $dt = 2x\ dx$, donc :
$I_4 = \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\ dt = \int_0^{\pi} 2x\cos(x)\ dx$.
Il reste à faire une IPP en posant $u(x) = 2x$, donc $u'(x) = 2$, et $v'(x) = \cos(x)$ qui a par exemple pour primitive $v(x) = \sin(x)$. On obtient alors :
$I_4 = [2x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin(x)\ dx = 0 - [-2\cos(x)]_0^{\pi} = -2 - 2 = -4$.

5. On a quasiment une forme $\frac{u'}{u}$, on peut intégrer directement :
$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{2+3\cos(x)}\ dx = \left[-\frac{1}{3}\ln(2+3\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}\ln\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{3}\ln(5) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{4+3\sqrt{2}}\right)$
(on ne fera pas beaucoup mieux que ça).

6. Il faut effectuer une décomposition en éléments simples :
   - le dénominateur admet pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et pour racines $t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$, donc $t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$. Comme le numérateur de la fraction est de degré inférieur au dénominateur, on peut donc décomposer sous la forme $\frac{t}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$.
   - en multipliant la dernière égalité obtenue par $t-2$ de chaque côté, on trouve $\frac{t}{t+1} = \frac{a(t-2)}{t+1} + b$, donc en posant $t = 2$, on en déduit que $b = \frac{2}{3}$.

- de même, en multipliant par $t+1$ puis en posant $t=-1$, on a $a = \dfrac{-1}{-1-2} = \dfrac{1}{3}$.

On peut maintenant effectuer le calcul, en faisant attention au signe des éléments simples : $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2-t-2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{3(t+1)} + \frac{2}{3(t-2)}\,dt = \left[\frac{1}{3}\ln(t+1) + \frac{2}{3}\ln(2-t)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2) = -\frac{\ln(2)}{3}$.

7. Le seul espoir raisonnnable est de faire deux IPP successives, en « primitivant » à chaque fois l'exponentielle (on aura donc toujours $v'(x) = v(x) = e^x$) et en dérivant la fonction trigonométrique, ce qui donnera d'abord $u(x) = \sin(2x)$ donc $u'(x) = 2\cos(2x)$, puis $u(x) = \cos(2x)$ et donc $u'(x) = -2\sin(2x)$. Toutes les fonctions manipulées sont sans problème de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration (on enchaine les deux IPP dans le calcul qui suit) : $I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(2x)\,dx = [e^x\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(2x)\,dx = 0 - [2e^x\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^x\sin(2x)\,dx = 2^{\frac{\pi}{2}} + 2 - 4I_7$. On déduit de la dernière égalité que $5I_7 = 2e^{\frac{\pi}{2}} + 2$, donc $I_7 = \dfrac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$.