Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 octobre 2019

1. C'est dans le cours !
2. On part par exemple d'une formule d'addition, complétée par des formules de duplication et de triplication : $\cos(5x) = \cos(3x+2x) = \cos(3x)\cos(2x) - \sin(3x)\sin(2x)$, donc $\cos(5x) = (4\cos^3(x) - 3\cos(x))(2\cos^2(x)-1) - 2\sin(x)\cos(x)(3\sin(x) - 4\sin^3(x)) = 8\cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 3\cos(x) - 2\cos(x)(3\sin^2(x) - 4\sin^4(x)) = 8\cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 3\cos(x) - 2\cos(x)(3(1-\cos^2(x)) - 4(1-\cos^2(x))^2) = 8\cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 3\cos(x) - 2\cos(x)(3 - 3\cos^2(x) - 4 + 8\cos^2(x) - 4\cos^4(x)) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$.
   Appliquons donc la formule précédente à $x = \frac{\pi}{10}$. On a alors $\cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc, en notant $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, on a $16\alpha^5 - 20\alpha^3 + 5\alpha = 0$. Le réel α n'étant pas nul (il est forcément inclus dans l'intervalle $]0, 1[$), on peut simplifier par α pour obtenir $16\alpha^4 - 20\alpha^2 + 5 = 0$. Posons $X = \alpha^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $16X^2 - 20X + 5 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 400 - 320 = 80$, et pour racines $X_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$, et $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Or, on sait que $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\alpha^2 > \frac{1}{2}$. La valeur de X_1 étant plus petite que $\frac{1}{2}$ (puisque $5 - \sqrt{5} < 4$), elle ne peut pas être égale à α^2, donc $\alpha^2 = X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Comme on sait par ailleurs que $\alpha > 0$, il ne reste plus qu'à conclure : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.
3. Utilisons la formule de duplication du cosinus faisant apparaitre des sinus : $1 - 2\sin^2(x) + 2 = 5\sin(x)$, donc $2\sin^2(x) + 5\sin(x) - 3 = 0$. On pose $X = \sin(x)$ pour se ramer à l'équation du second degré $2X^2 + 5X - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$ et admet pour racines $X_1 = \frac{-5-7}{4} = -3$ (valeur impossible pour un sinus) et $X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$. On est donc réduit à la seule possibilité $\sin(x) = \frac{1}{2}$, qui donne les solutions $x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.
4. On dérive la composée : $f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)}$. Or on sait que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, donc $1 + \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$, et $f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.
5. Bourrinons joyeusement : $\sin(x) + 4\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 0$, soit $\sin(x)(4 + 4\cos(x) - 4\sin^2(x)) = \sin(x)(4 + 4\cos(x) - 4(1 - \cos^2(x))) = 0$, ou encore $4\sin(x)(\cos(x) + \cos^2(x)) = 4\sin(x)\cos(x)(1 + \cos(x)) = 0$. On doit donc avoir $\sin(x) = 0$, ou bien $\cos(x) = 0$, ou encore $\cos(x) = -1$, mais les valeurs vérifiant cette dernière condition vérifient également $\sin(x) = 0$, on peut donc les oublier. On obtient en fait simplement $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. On pouvait aussi s'en sortir en appliquant à l'équation initiale une transformation somme-produit à la somme $\sin(x) + \sin(3x)$ puis en factorisant par $\sin(2x)$.