Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 septembre 2019

1. Contraposée : Je n'intègrerai même pas les Arts l'an prochain, donc je n'ai pas eu 20 en maths au bac.

   Réciproque : J'intégrerai au moins les Arts l'an prochain, donc j'ai eu 20 en maths au bac.

2. C'est bien sûr dans le cours : pour deux sous-ensembles A et B d'un même ensemble, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. On peut d'ailleurs généraliser ces formules à plus de deux sous-ensembles.

3. En utilisant les lois de Morgan puis la distributivité de l'union par rapport à l'intersection, on calcule : $\overline{A \cup (\overline{B} \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{\overline{B} \cap C}) = \overline{A} \cap (\overline{\overline{B}} \cup \overline{C}) = \overline{A} \cap (B \cup \overline{C}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$.

4. On constate que 1 est racine évidente du membre de gauche de l'inéquation : $2-5+1+2=0$. On peut donc factoriser ce dernier sous la forme $2x^3-5x^2+x+2 = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a=2$; $b-a=-5$, donc $b=a-5=-3$; $c-b=1$ donc $c=1+b=-2$; et $-c=2$ qui est bien vérifiée. Le trinôme $2x^2-3x-2$ a pour discriminant $\Delta = 9+16=25$ et admet pour racines $x_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$, ce qui nous permet de dresser le tableau de signes suivant :

x		$-\frac{1}{2}$		1		2	
$x-1$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
$2x^2-3x-2$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$2x^3-5x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

   Il ne reste plus qu'à conclure : $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]1,2[$.

5. Les expressions sous les valeurs absolues s'annulent respectivement en $x=5$ et $x=\dfrac{4}{3}$, on effectue un tableau :

x		$\frac{4}{3}$		5	
$\lvert x-5\rvert$	$5-x$	$\Vert$	$5-x$	0	$x-5$
$\lvert -3x+4\rvert$	$4-3x$	0	$3x-4$	$\Vert$	$3x-4$
$\lvert x-5\rvert + \lvert -3x+4\rvert$	$-4x+9$	$\Vert$	$2x+1$	$\Vert$	$4x-9$

   On résout maintenant notre équation sur chacun des intervalles :

   - sur $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right]$, on a $-4x+9=10 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ qui est une solution valable.
   - sur $\left[\dfrac{4}{3}, 5\right]$, on a $2x+1=10 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$, qui là encore appartient bien à l'intervalle de résolution.
   - sur $[5, +\infty[$, on a $4x-9=10 \Leftrightarrow x = \dfrac{19}{4}$, solution à rejeter puisque $\dfrac{19}{4} < 5$.

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{2}\right\}$.